Chapitre 17 : Probabilités

Dans toute la leçon, Ω désigne un ensemble non vide fini, appelé univers.

I. Espace probabilisé fini

On commence par rappeler le vocabulaire des probabilités, qui a déjà été présenté au lycée. On va seulement un peu plus loin en termes de formalisme.

Définition 1

- Un événement A est un sous-ensemble (= une partie) de l'univers : $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.
- Un événement élémentaire est un événement ayant un seul élément.
- L'univers Ω est appelé événement certain.
- $\emptyset$ est appelé événement impossible.
- Si A est un événement, l'événement contraire est $\overline{A}$.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 1

On lance un dé équilibré à 6 faces.

- On associe à cette expérience l'univers

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}.$$

- On s'intéresse aux événements particuliers :

$$A = \text{" obtenir un n° pair"} = \{2;4;6\}\ ;$$
$$B = \text{"obtenir un n° impair"} = \{1;3;5\}.$$

Remarques.

- Les événements peuvent s'écrire en français (en rouge ci-dessus) ou sous forme ensembliste (en bleu).
- Quand on écrit en français, on écrit généralement $A : \cdots$ au lieu de $A = \cdots$

- L'événement B est la réunion des trois événements élémentaires $\{1\}$, $\{3\}$ et $\{5\}$.
- Les événements A et B sont incompatibles.

Définition 2

Une probabilité sur Ω est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour tous événements disjoints A, B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Le couple (Ω, P) est appelé espace probabilisé.

Remarques.

- On peut donc parler de $P(A)$ pour toute partie A de Ω.
- On a la réunion disjointe $\Omega = \Omega \sqcup \emptyset$, donc

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset).$$

On en déduit $P(\emptyset) = 0$.

Proposition 1 (probabilité uniforme)

On définit une probabilité en posant

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$$

pour toute partie A de E.
Cette probabilité s'appelle probabilité uniforme.

Exemple 2

On reprend l'exemple 1. L'expression « dé équilibré » sous-entend que Ω doit être muni de la probabilité uniforme P. On a donc

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De même $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Remarque.
La plupart du temps, les énoncés sous-entendent que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, c'est-à-dire que tous les événements élémentaires ont la même probabilité. C'est le cas par exemple lors des lancers de dé, lors du choix d'un élément au hasard dans un ensemble, etc. On utilisera alors toujours la probabilité uniforme.

On rappelle les formules du cours de lycée :

Proposition 2

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

1. Pour tout événement A, $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$.
2. Pour tous événements A, B :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
3. Pour tous événements A, B tels que $A \subset B$:
$$P(A) \leq P(B).$$
4. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux disjoints :
$$P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = P\left(A_1\right) + \cdots + P\left(A_n\right).$$

On peut déjà faire beaucoup de calculs intéressants en combinant cette proposition avec les méthodes de dénombrement du chapitre n°10.

Exemple 3

On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On s'intéresse à l'événement

$$B = \text{« la somme des n° vaut 4 ».}$$

L'expression « dés équilibrés » sous-entend qu'il faut utiliser la probabilité uniforme. On utilise un tableau :

SOMME		1^er^ dé 1	2	3	4
2^e^ dé	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

Il y a $4 \times 4 = 16$ cas possibles et 3 cas favorables à B donc $P(B) = \frac{3}{16}$.

Exemple 4

Dans une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité que tous les élèves aient des dates d'anniversaire différentes ? [a]
On note

A : « les dates d'anniversaires sont toutes différentes ».

- les cas possibles sont les 30-listes d'un ensemble à 365 éléments (les dates de l'année). Il y en a 365^{30}.
- les cas favorables à A sont les 30-listes sans répétition d'un ensemble à 365 éléments. Il y en a $\frac{365!}{(365-30)!} = \frac{365!}{335!}$.

On a donc

$$P(A) = \frac{\frac{365!}{335!}}{365^{30}} = \frac{365!}{335! \times 365^{30}} \approx 0{,}27.$$

[a] On considérera que personne n'est né le 29 février et que les listes de dates d'anniversaires sont équiprobables (probabilité uniforme).

Remarque.
Les calculatrices ne sont pas assez performantes pour calculer $\frac{365!}{335!\times 365^{30}}$ – les nombres en jeu sont trop grands. Pour obtenir la réponse, il faut remarquer que $\frac{365!}{335!\times 365^{30}} = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365}$ et faire les multiplications étape par étape – on peut accélérer les calculs en faisant un programme en Python ou en utilisant un tableur.

Proposition 3

On suppose que Ω contient n éléments, $\Omega = \{w_1; \cdots; w_n\}$, et on se donne n réels positifs $p_1, \ldots, p_n$ de somme 1 :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Dans ce cas, il existe une unique probabilité P sur Ω vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{w_i\}) = p_i.$$

Cette proposition permet d'aborder des exercices plus théoriques.

Exercices
Exercices 1 à 10

II. Indépendance et conditionnement

On commence par un rappel sur les arbres et les probabilités conditionnelles, avec un exemple du lycée. Dans toute la section, on travaille dans un espace probabilisé (Ω, P).

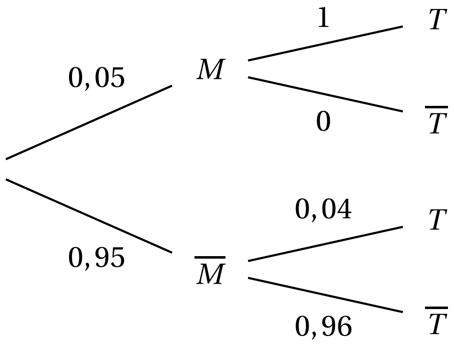
Exemple 5

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays (vaches, bœufs, etc.). Elle touche 5 % des 10 000 bêtes.
Un test permet de détecter systématiquement la maladie lorsqu'elle est présente chez un animal ; en revanche le test indique la présence de la maladie chez 4 % des animaux sains (on parle de « faux positifs »).

On choisit un animal au hasard. On considère les événements :
M : « l'animal est malade »,
T : « le test est positif ».

On peut représenter la situation par un tableau d'effectif ou par un arbre pondéré (U désigne l'univers) :

	M	$\overline{M}$	U
T	500	380	880
$\overline{T}$	0	9 120	9 120
U	500	9 500	10 000



Détails des calculs :

- $\frac{10000\times 5}{100} = 500.$
- $10000 - 500 = 9500.$
- $\frac{9500\times 4}{100} = 380.$

Exemple 5 – Suite

On étudie quatre problèmes :

Problème n°1. La probabilité qu'un animal ait un test positif est :

- En utilisant le tableau : $P(T) = \frac{880}{10000} = 0,088$.
- En utilisant l'arbre :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M\cap T) + P\left(\overline{M}\cap T\right) \qquad \text{(formule des probabilités totales)} \\ &= 0,05\times 1 + 0,95\times 0,04 = 0,088. \end{aligned}$$

Problème n°2. Sachant qu'un animal est malade, la probabilité qu'il ait un test positif est $P_M(T) = 1$.

Problème n°3. Sachant qu'un animal a un test positif, la probabilité qu'il soit malade est :

- En utilisant le tableau : $P_T(M) = \frac{500}{880} \approx 0,57$.
- En utilisant la formule vue au lycée et l'arbre : $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{0,05\times 1}{0,088} \approx 0,57$.

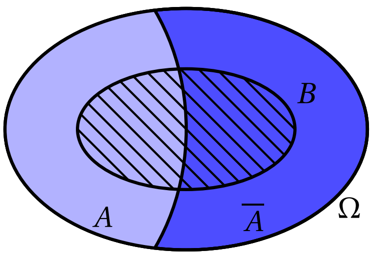
Problème n°4. $P_T(M) \neq P(M)$, donc les événements M et T ne sont pas indépendants : le fait de savoir qu'un animal a un test positif a une incidence sur la probabilité qu'il soit malade.

On formalise les notions de l'exemple précédent :

Proposition 4 (formule des proba. totales)

Pour tous événements A, B :

$$P(B) = P(A\cap B) + P\left(\overline{A}\cap B\right).$$



Démonstration

On a

$$P(A\cap B) = P_A(B)\times P(A),$$
$$P(A\cap B) = P_B(A)\times P(B),$$

donc

$$P_A(B)\times P(A) = P_B(A)\times P(B).$$

La propriété en découle immédiatement.

Définition 3

Soit A un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement B, on pose

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Proposition 5 (formule de Bayes)

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On a alors

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}.$$

Exemple 6

On reprend l'exemple 5. Une fois calculé $P(T)$, on peut calculer $P_T(M)$ directement à partir des données de l'énoncé et de la formule de Bayes :

$$P_T(M) = \frac{P_M(T)P(M)}{P(T)} = \frac{1\times 0,05}{0,088} \approx 0,57.$$

Le calcul est identique à celui que nous avons mené à la fin de l'exemple 5 (problème n°3).

Proposition 6

Si A est un événement de probabilité non nulle, P_A est une probabilité sur Ω.

Exemple 7

On prend encore l'exemple 5. On sait que $P_T(M) \approx 0,57$, donc

$$P_T\left(\overline{M}\right) = 1 - P_T(M) \approx 1 - 0,57 \approx 0,43.$$

Déf. 4

Deux événements A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple 8

On tire une carte dans un jeu de 32. On considère les événements :

$$\begin{aligned} A &: \text{« la carte est un cœur »;} \\ B &: \text{« la carte est une dame »;} \\ A \cap B &: \text{« la carte est la dame de cœur ».} \end{aligned}$$

On a

$$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{32}.$$

On remarque que $P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$. Les événements A et B sont donc indépendants, conformément à l'intuition : la valeur de la carte est indépendante de sa couleur.

Remarque.

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, l'indépendance de A et B est équivalente à $P_A(B) = P(B)$ ou à $P_B(A) = P(A)$ (une égalité entraînant l'autre).

Un événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre événement.

Exercices

Exercices 11 à 17

III. Compléments

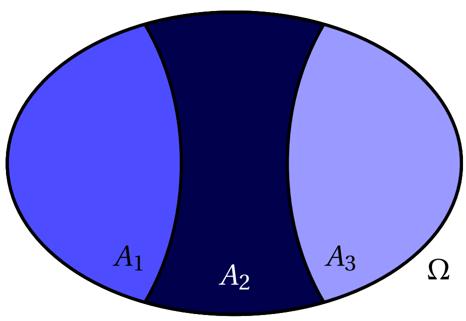
On généralise certaines des propositions de la section précédente à la situation de n événements. On travaille à nouveau dans un espace probabilisé (Ω, P).

Définition 5

On dit que n événements $A_1, \ldots, A_n$ réalisent une partition de l'univers, ou que $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'événements (s.c.e.), s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est égale à Ω :

$$\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Ci-contre un exemple avec $n = 3$.



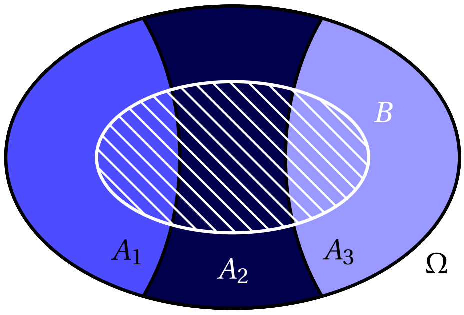
Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un s.c.e. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

(version générale de la formule des probabilités totales).

Si tous les A_i ont une probabilité non nulle, cette formule se réécrit

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\, P(A_i).$$



On généralise également la notion d'indépendance :

Déf. 6

On dit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout $1 \leq k \leq n$ et pour toute suite d'entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times P\left(A_{i_k}\right).$$

Exemple 9

Trois événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si, et seulement si les quatre conditions ci-dessous sont remplies :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \times P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \end{aligned}$$

Attention

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux; mais la réciproque est fausse (voir exercices).

On termine la leçon avec la formule des probabilités composées.

Proposition 7 (formule des probabilités composées)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exemple 10

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 blanches. On tire successivement trois boules ; si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?

Exemple 10 – Suite

On note A_i l'événement « la i-ème boule est blanche ». La probabilité cherchée est

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3).$$

Or :

- $P(A_1) = \frac{3}{10}$.
- Si l'événement A_1 est réalisé, avant le 2^{e} tirage, l'urne contient 8 boules noires et 2 blanches, donc $P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{10}$.
- Si l'événement $A_1 \cap A_2$ est réalisé, avant le 3^{e} tirage, l'urne contient 9 boules noires et 1 blanche, donc $P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{1}{10}$.

Conclusion :

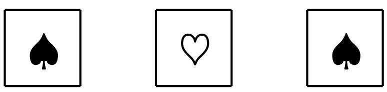
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{6}{1\,000}.$$

Exercices

Exercices 18 à 22

IV. Exercices

Exercice 1 (🏛).
Lorsqu'on actionne la manette d'une machine à sous, on fait apparaître sur l'écran trois symboles choisis au hasard parmi ♡ (cœur), ♢ (carreau), ♠ (pique) et ♣ (trèfle).



1. Calculer la probabilité des événements :
   G : « Les trois symboles à l'écran sont différents. »
   H : « Le symbole au centre est un cœur. »
2. Calculer $P(G \cup H)$.

Exercice 2 (🏛).
On lance un dé à 6 faces quatre fois de suite. Calculer la probabilité des événements :
A : « on obtient 4 fois le chiffre 6 » ;
B : « on obtient au moins un 6 » ;
C : « les quatre numéros sont différents » ;
D : « le produit des n° obtenus est pair » .

Exercice 3 (🏛).
On demande aux 20 élèves d'une classe de choisir un nombre au hasard entre 1 et 100. Quelle est la probabilité qu'ils choisissent tous un nombre différent ?

Exercice 4 (🏛).
On tire simultanément trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Calculer la probabilité des événements :
A : « on n'obtient que des as » ;
B : « on obtient au moins un cœur » ;
C : « on obtient deux as et un roi ».

Exercice 5.
Soient A, B, C trois événements. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :
I : « seul A se réalise » ;
J : « A et B se réalisent » ;
K : « au moins l'un des événements se réalise » ;
L : « aucun événement ne se réalise » ;
M : « un seul événement se réalise » .

Exercice 6.
On lance un dé pipé à 6 faces. On note $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. On suppose que

- $P(\{1\}) = P(\{2;3\}) = P(\{4;5;6\})$,
- $P(\{2\}) = P(\{3\})$,
- $P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$.

Déterminer P.

Exercice 7.
On suppose que $\Omega = \{1;\cdots;n\}$.
Existe-t-il une probabilité P sur Ω telle que $P(\{k\})$ soit proportionnelle à k pour tout $k \in \Omega$?

On commencera par étudier le cas $n = 4$.

Exercice 8.
On suppose que Ω contient trois éléments : $\Omega = \{x;y;z\}$.
Déterminer toutes les probabilités P sur Ω vérifiant

$$P\left(\{x;y\}\right) = P\left(\{y;z\}\right) = \frac{3}{5}.$$

Exercice 9 (🏛).
Soit (Ω, P) un espace probabilisé.
Prouver que pour tous événements A, B :

1. $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$.

2. $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

Exercice 10.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 60 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. On sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 95 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 90 % des cas.

On choisit un coyote au hasard. On considère les événements :
M : « le coyote est malade »,
T : « le test est positif ».
On effectuera les calculs de deux façons différentes :

- à l'aide d'un tableau d'effectif, en partant d'une population de 100 coyotes;
- à l'aide d'un arbre pondéré.

Déterminer $P(M \cap T)$, $P(T)$ et $P_T(M)$.

Exercice 11 (🏛).
Lorsque le basketteur Stephen Curry tire en match, il y a 53 % de chances que ce soit un tir à 2 points et 47 % de chances que ce soit un tir à 3 points. De plus, quand il tire à 2 points, son pourcentage de réussite est 52 % contre 44 % à 3 points.
On choisit un tir au hasard. On considère les événements :
D : « Stephen Curry tire à 2 points »,
M : « Stephen Curry marque ».

Stephen Curry vient de marquer. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré à deux points?

Exercice 12 (🏛).
On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $1/2$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?

Exercice 13 (🏛).
Une urne contient quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et six boules bleues numérotées de 1 à 6.
On tire simultanément deux boules de l'urne. Calculer la probabilité qu'elles soient toutes les deux rouges sachant qu'elles portent toutes les deux un numéro pair.

Exercice 14 (🏛).
Les joueurs de jeux de rôles utilisent parfois des dés à 100 faces, numérotées de 1 à 100. On suppose qu'on dispose d'un tel dé, et qu'il est équilibré. On le lance et on note le résultat obtenu.
On considère les événements :
A : « le résultat obtenu est pair » ;
B : « le résultat obtenu est multiple de 5 ».
Les événements A et B sont-ils indépendants?

Exercice 15 (🏛).
Un sac contient trois jetons rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jetons jaunes numérotés 1 et 2 et un jeton bleu numéroté 1. On tire au hasard un jeton du sac.
On désigne respectivement par R, U et D les événements « le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».
Les événements R et U sont-ils indépendants? Et les événements R et D ?

Exercice 16.
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Soient A, B deux événements tels que $P(A\cap B)\neq 0$. Combien vaut $P(A|A\cap B)$?
2. Soient A et B deux événements tels que $P(A)=0,4$; $P(B)=0,6$ et $P(A\cup B)=0,9$.
   Les événements A et B sont-ils indépendants?
3. On suppose à présent que $P(A)=0,4$; $P(A\cup B)=0,7$; et que les événements A et B sont indépendants. Déterminer la valeur de $P(B)$.
4. Quels sont les événements indépendants d'eux-mêmes?
5. Prouver que si A est indépendant de B, alors il est indépendant de $\overline{B}$.

Exercice 17 (🏛).
Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi. On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Pour tout entier naturel n, on note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0=1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2=0,85$.
2. Prouver que, pour tout entier naturel n :
$$p_{n+1}=0,5p_n+0,4.$$
3. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$0,8\leq p_{n+1}\leq p_n.$$
4. En déduire que $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 18 (🏛).
Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires, indiscernables au toucher. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.
On pourra utiliser les événements :
A_i : « la i-ème boule tirée est blanche » (pour $i=1,2,3$);
N : « la 1re boule tirée est noire » ;
B : « on a tiré au moins une boule noire ».

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

Exercice 19 (🏛).

1. Soient A, B, C trois événements. Compléter l'égalité avec les nombres $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$, $P(B\cap C)$ et $P(A\cap B\cap C)$:
$$P(A\cup B\cup C)=\cdots$$
2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3, qui fonctionnent indépendamment les uns des autres et dont la probabilité de fonctionnement individuelle est p.
   Calculer la probabilité de fonctionnement du circuit :
   - si les composants sont disposés en série;
   - si les composants sont disposés en parallèle;
   - si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 20.
On supposera que les enfants qui naissent ont une chance sur deux d'être des filles; et que les sexes des enfants d'une fratrie sont indépendants les uns des autres.

La famille Durand a deux enfants. On considère les événements :
A : « les deux enfants sont de sexes différents » ;
B : « l'aîné est une fille » ;
C : « le cadet est un garçon ».

Prouver que les événements A, B, C sont indépendants deux à deux, mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 21 (🏛).

L'urne U_1 contient 2 boules rouges et 3 bleues; l'urne U_2 contient 4 boules rouges et 5 bleues; l'urne U_3 contient 3 boules bleues et 6 boules vertes. On tire au hasard une boule de U_1, on la place dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2, on la place dans U_3 et enfin on tire une boule de U_3 que l'on place dans U_1. On appelle

- R_i l'événement « obtenir une boule rouge au i-ème tirage »;
- B_i l'événement « obtenir une boule bleue au i-ème tirage »;
- V_i l'événement « obtenir une boule verte au i-ème tirage ».

1. Calculer la probabilité de l'événement $R_1 \cap R_3$.

2. Quelle est la probabilité qu'à la fin de l'expérience, l'urne U_1 ait retrouvé sa composition initiale ?

Exercice 22.

Une compagnie d'assurance automobile a mis en place le système de bonus-malus suivant.
Il existe trois niveaux de cotisation annuelle :

Ⓐ 455 € Ⓑ 364 € Ⓒ 273 €

La première année, l'assuré paye le tarif B.

- S'il n'a pas été responsable d'un accident pendant une année, il passe au tarif inférieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus bas; auquel cas il y reste.
- S'il a été responsable d'un accident au cours d'une année, il passe au tarif supérieur l'année suivante, sauf s'il est déjà au tarif le plus haut; auquel cas il y reste.

La compagnie estime à 10 % la probabilité qu'un assuré pris au hasard soit responsable d'un accident au cours d'une année.
Par ailleurs, elle évalue en moyenne à 280 € par assuré ses dépenses de remboursement lors des accidents.

On choisit un assuré au hasard dans la catégorie B. On note A_n (respectivement B_n, C_n) les événements « l'assuré paye le tarif A (respectivement B, C) » la n-ème année et $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ leurs probabilités. On note également $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer P_0 et calculer P_1 et P_2.

2. Déterminer une matrice T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = TP_n.$$

3. En déduire une expression de P_n en fonction de T et P_0 pour tout entier naturel n.

4. On estime que la valeur de P_{100} donne une bonne indication de la répartition des assurés dans les différentes catégories sur le long terme. Compléter la fonction Python ci-dessous, dont la valeur en sortie indique l'espérance de la somme payée sur le long terme par un assuré pris au hasard.

```python
import numpy as np

def esperance_cotis():
        P=...
        T=np.array([[0.1,0.1,0],
                [0.9,0,0.1],
                [0,0.9,0.9]])
        for k ...:
                P=np.dot(T,P)
        montant_cotis=P[0,0]*455 + ...
        return montant_cotis
```

5. Éditer le programme et en déduire si le barème mis en place par la compagnie d'assurance est viable ou non.