# Chapitre 16 : Dérivation

Dans ce chapitre, sauf mention explicite, $I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

## I. Nombre dérivé, fonction dérivée

Dans ce paragraphe, on rappelle ce que sont un nombre dérivé et une fonction dérivée, puis on donne quelques compléments.

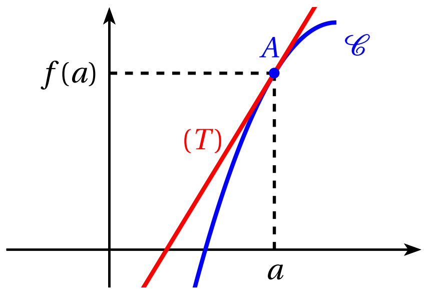
**Définition 1**

Soit $a \in I$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a$ si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est appelée nombre dérivé de $f$ en $a$ et notée $f'(a)$.

Notons $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $f$. La dérivabilité en $a$ équivaut à l'existence d'une tangente non verticale $(T)$ ; le nombre dérivé est le coefficient directeur de cette tangente.




On a $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

**Remarque.**
La limite ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

**Exemple 1**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et soit $a$ un nombre réel.

Pour tout $h \neq 0$ :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{h} = \frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a + h.$$

On en déduit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a + 0 = 2a.$$

La fonction $f$ est donc dérivable en $a$ et $f'(a) = 2a$.

**Déf. 2**

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $I$ si elle est dérivable en tout point $a \in I$. La fonction dérivée est

$$f' : a \mapsto f'(a).$$

**Exemple 2**

D'après l'exemple précédent, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.

Nous renvoyons le lecteur aux chapitres précédents pour les dérivées des fonctions usuelles et les opérations sur les dérivées. Nous démontrons certains résultats en exercices.

**Exercices**

Exercices 1 à 7

**Proposition 1**

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a$, alors elle est continue en $a$.

**Démonstration**

On suppose $f$ dérivable en $a$. On peut donc écrire :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & = f'(a) \\ \lim\limits_{h\to 0} h & = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times h = f'(a) \times 0 = 0.$$

Autrement dit : $\lim\limits_{h\to 0} \big(f(a+h)-f(a)\big) = 0$, et donc $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. La fonction $f$ est bien continue en $a$.

**Définition 3**

Soit $a \in I$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ :

- est dérivable **à droite** en $a$ si la limite

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est notée $f'_{\mathrm{d}}(a)$.

- est dérivable **à gauche** en $a$ si la limite

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. Le cas échéant, cette limite est notée $f'_{\mathrm{g}}(a)$.

**Exemple 3**

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est :

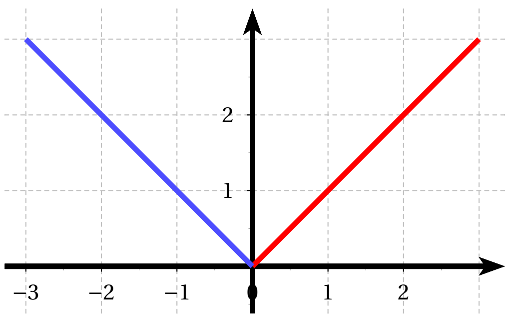
- dérivable **à droite** en 0 car

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0, h>0} 1 = 1.$$

- dérivable **à gauche** en 0 car

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0, h<0} (-1) = -1.$$

On a donc $f'_{\mathrm{d}}(0) = 1$ (pente de la demi-droite rouge) et $f'_{\mathrm{g}}(0) = -1$ (pente de la demi-droite bleue).



**Proposition 2**

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a$ si, et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en $a$ et si $f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$.

**Exercices**

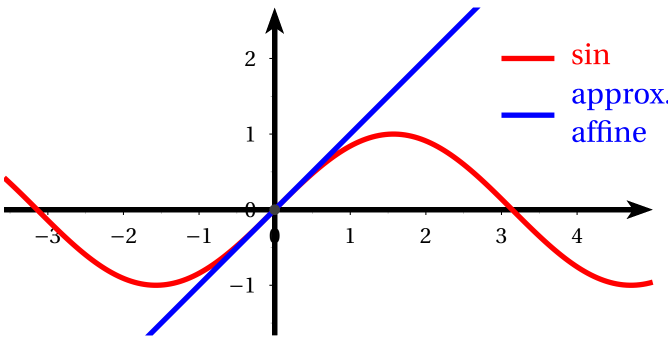
Exercice 8

Si $f$ est dérivable en $a$, on peut approximer $f(x)$ au voisinage de $a$ en utilisant l'équation de la tangente :

$$f(x) \underset{x\to a}{\approx} f(a) + f'(a)(x-a).$$

Par exemple, avec $f(x) = \sin x$ et $a = 0$, cela donne :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{\approx} f(0) + f'(0)(x-0) \\ \sin x &\underset{x\to 0}{\approx} \sin 0 + \cos(0)x \\ \sin x &\underset{x\to 0}{\approx} 0 + 1x \\ \sin x &\underset{x\to 0}{\approx} x \end{aligned}$$




L'équivalent ci-dessus est imprécis, car on ne connaît pas la marge d'erreur lorsqu'on fait l'approximation. En réalité, on peut faire mieux : si $f$ est dérivable en $a$, alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Cette égalité se réécrit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)}{x-a} = 0,$$

et on a donc

$$f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \underset{x\to a}{=} o(x-a).$$

Autrement dit :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a),$$

si bien que le « reste », $o(x-a)$, est négligeable devant $(x-a)$.

Plus généralement :

**Proposition 3**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- Si $f$ est dérivable en $a$, alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a).$$

- Réciproquement, s'il existe un réel $\ell$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)\ell + o(x-a)$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$.

Dans ce cas, on dit que $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 (DL1) en $a$.

**Exemples 4**

1. On reprend l'étude qui précède la proposition :
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
$$f(x) \underset{x\to 2}{=} f(2) + 3(x-2) + o(x-2).$$
Alors $f$ est dérivable en $a = 2$ et $f'(2) = 3$.

**Remarque.**
La forme générale d'un DL1 est $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$. Dans la proposition qui précède, $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$.

On rencontrera en fin d'année des DL2 : $f(x) \underset{x\to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right)$, des DL3, etc.

**Exercices**

Exercices 9 et 10

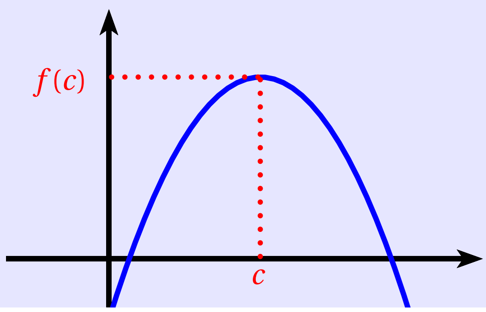
# II. Propriétés des fonctions dérivables

**Proposition 4**

Si $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en $c \in ]a,b[$ et si elle est dérivable en $c$, alors $f'(c) = 0$.

**Démonstration**

On suppose par exemple que $f$ admet un maximum local en $c$ (la démonstration est identique s'il s'agit d'un minimum). Rappelons que cela signifie qu'il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $c$ et tel que
$$\forall x \in I, f(x) \leq f(c).$$
Dans ce cas, si $h > 0$ est assez petit :
$$\frac{\overbrace{f(c+h) - f(c)}^{\ominus}}{h\ \oplus} \leq 0,$$
donc en passant à la limite lorsque $h$ tend vers 0 :
$$f'_{\mathrm{d}}(c) \leq 0.$$
Inversement, si $h < 0$ est assez petit :
$$\frac{\overbrace{f(c+h) - f(c)}^{\ominus}}{h\ \ominus} \geq 0,$$
donc en passant à la limite lorsque $h$ tend vers 0 :
$$f'_{\mathrm{g}}(c) \geq 0.$$
Or d'après la proposition 2, $f'(c) = f'_{\mathrm{d}}(c) = f'_{\mathrm{g}}(c)$, donc $f'(c)$ est à la fois positif et négatif – il est donc nul.



## Théorème 1 (Rolle)

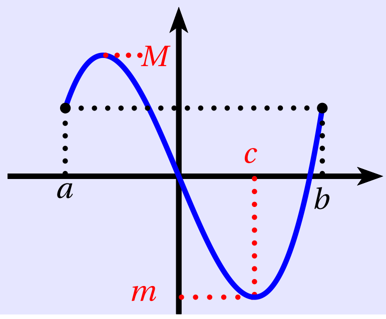
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

## Démonstration

Si $f$ est constante sur $[a,b]$, $f'$ est nulle et n'importe quel nombre $c$ convient.

Dans le cas contraire, comme $f$ est continue sur $[a,b]$, $f([a,b])$ est un segment $[m,M]$ (d'après une propriété de la leçon sur les fonctions continues). Le nombre $m$ est le minimum de $f$ sur $[a,b]$, le nombre $M$ son maximum.

On ne peut avoir à la fois $f(a) = f(b) = m$ et $f(a) = f(b) = M$, sinon on aurait $m = M$ et $f$ serait constante. Supposons donc (par exemple) que $f(a)$ et $f(b)$ (qui sont égaux) sont strictement plus grands que $m$. Dans ce cas, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f(c) = m$. La fonction $f$ admet un minimum global (et donc local) en $c$, donc $f'(c) = 0$ d'après la proposition précédente.




## Théorème 2 (des accroissements finis – TAF)

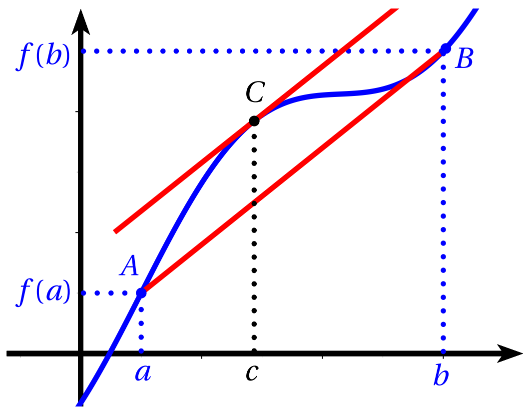
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

**Remarques.**

- Le TAF est démontré en exercices.
- Reformulé géométriquement, le TAF affirme qu'il existe $c$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, c'est-à-dire qu'il existe au moins un point $C$ de la courbe tel que la pente de la tangente en $C$ soit égal à la pente de la droite $(AB)$.

  Reformulé d'un point de vue physique, le TAF dit qu'il y a au moins un moment où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne, ce qui est une évidence.




- Le théorème a un corollaire extrêmement important : si $f$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si $f'$ est strictement positive sur $]a,b[$, alors $f$ est strictement croissante sur $[a,b]$. En effet, si $x < y$ sont deux réels dans $[a,b]$, l'égalité $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{\oplus}\underbrace{(y-x)}_{\oplus}$, avec $x < c < y$, entraîne $f(y) > f(x)$.

  On obtient de même la décroissance stricte d'une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et dont la dérivée est strictement négative sur $]a,b[$.

Le théorème ci-dessous est un corollaire immédiat du TAF :

**Théorème 3 (inégalité des accroissements finis – IAF)**

Si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ et si $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in I$, alors pour tous $x$, $y$ dans $I$ :

$$|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|.$$

**Exemple 5**

La dérivée de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ est $x \mapsto \cos x$. Or $|\cos t| \leq 1$ pour tout réel $t$, donc d'après l'IAF (avec $M = 1$), pour tous réels $x$, $y$ :

$$|\sin y - \sin x| \leq |y - x|.$$

**Exercices**

Exercices 11 à 20

# III. Dérivées successives

On peut définir (par récurrence) les dérivées successives d'une fonction $f$. On note $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième (la dérivée 0-ième étant la fonction $f$ elle-même).

**Déf. 4** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est $n$ fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur $I$. On note $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur $I$.

**Remarques.**

- Les fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ sont les fonctions continues.
- Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$, alors elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \leq n$.

**Déf. 5** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Exemple 6**

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$f^{(n)} : x \mapsto 2^n \mathrm{e}^{2x}.$$

**Exercices**

Exercices 21 et 22

**Proposition 5**

Si $u \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$, $v \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et si $a$ et $b$ sont deux réels, alors $(au + bv) \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $(au + bv)^{(n)} = au^{(n)} + bv^{(n)}$.

**Remarque.**
$\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

### Proposition 6 (formule de Leibniz)

Si $u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $v \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, alors $u \times v \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et

$$(u \times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

### Exemple 7

La fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, comme produit des fonctions $\mathscr{C}^\infty$

$$u : x \mapsto x \qquad \text{et} \qquad v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}.$$

D'après la formule de Leibniz, pour tout entier naturel $n$ :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x). \tag{1}$$

Or $u^{(0)}(x) = u(x) = x$, $u^{(1)}(x) = u'(x) = 1$ et $u^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$. Donc, dans la formule de Leibniz, tous les termes sont nuls à l'exception des termes d'indice 0 et 1. On obtient donc, pour $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} u^{(0)}(x)\, v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u^{(1)}(x)\, v^{(n-1)}(x) \\ &= 1 \times x \times 2^n \mathrm{e}^{2x} + n \times 1 \times 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} \\ &= 2^{n-1} \mathrm{e}^{2x} (2x+n). \end{aligned}$$

### Proposition 7

1. Si $u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, $v \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ et si $v$ ne s'annule pas sur $I$, alors $\frac{u}{v} \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.
2. Si $u \in \mathscr{C}^n(I,J)$, $v \in \mathscr{C}^n(J,\mathbb{R})$ alors $v \circ u \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.
3. Si $f \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$, avec $n \geq 1$, si $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ et si $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.

**Exercices**
Exercices 23 à 25

# IV. Exercices

### Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ et soit $a$ un réel.

1. Prouver que pour tout $h \neq 0$ :
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2.$$
2. En déduire $f'(a)$.

### Exercice 2.

Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ et soit $a$ un réel non nul.

1. Prouver que pour tout $h \neq 0$ suffisamment petit :
$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$
2. En déduire $g'(a)$.

### Exercice 3.

1. Placer sur le cercle trigonométrique un point $M$ associé à $0 < X < \frac{\pi}{2}$. En comparant différentes aires, prouver que
$$\sin X \leq X \leq \tan X.$$
2. En déduire $\lim\limits_{X \to 0, X>0} \frac{\sin X}{X}$, puis $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X}$.
3. Soit $a$ un nombre réel. Prouver que pour tout $h \neq 0$ :
$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.$$
4. En déduire $\sin'(a)$.

### Exercice 4.

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I$ et soit $a \in I$. On pose $p(x) = u(x) \times v(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Prouver que pour tout $h \neq 0$ suffisamment petit :
$$\frac{p(a+h)-p(a)}{h} = u(a+h) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h} + v(a) \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$
2. En déduire $p'(a)$.

### Exercice 5.

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction et l'ensemble de définition de la dérivée, puis calculer la fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto x^x$.
2. $g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$.
4. $i : x \mapsto \sqrt{x^2+2x-3}$.
5. $j : x \mapsto \arccos\left(1-2x^2\right)$.

### Exercice 6.

Démontrer les égalités suivantes.

1. $\forall x \in [-1;1]$ :
$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$
2. $$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

### Exercice 7.

Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$.
4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$.

### Exercice 8.

Étudier la dérivabilité des fonctions :

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1, \\ (x-1)^2 & \text{si } x < 1. \end{cases}$
2. $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(On commencera par étudier la continuité.)

### Exercice 9.

Donner des DL1 des fonctions au point $a$.

1. $x \mapsto \cos x$, $a = 2$.
2. $x \mapsto \arctan x$, $a = 0$.
3. $x \mapsto (x+1)^3$, $a = -1$.
4. $x \mapsto (x+1)^3$, $a = 1$.
5. $x \mapsto x e^{-x}$, $a = 0$.

**Exercice 10.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 3$ et

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} 5 - 2x + o(x-1).$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 1.

**Exercice 11.**
Soit $P(X) = (X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$. En utilisant le théorème de Rolle, prouver que $P'$ a au moins trois racines réelles.

**Exercice 12.**
Un cycliste parcourt 30 km en 2 h. On note :

- $t$ le temps, exprimé en heures, depuis son départ;
- $d(t)$ la distance parcourue au temps $t$, exprimée en kilomètres.

En utilisant le TAF, prouver qu'à un moment donné de son parcours, le cycliste a roulé à la vitesse exacte de 15 km/h.

**Exercice 13.**
En utilisant l'IAF, démontrer que pour tous réels $x$, $y$ :

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

**Exercice 14.**
En utilisant le TAF, prouver que pour tout $x \geq 0$ :

$$x \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq x\mathrm{e}^x.$$

**Exercice 15.**
En utilisant l'IAF, majorer l'erreur commise lorsqu'on fait l'approximation $\sqrt{101} \approx 10$.

**Exercice 16.**

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   En utilisant la question 1, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\ln(n+1) \leq S_n.$$

   En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**Exercice 17 (preuve du TAF).**
Dans cet exercice, on démontre le TAF. On se donne donc une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et on suppose que $f$ est dérivable sur $]a,b[$.

1. On pose

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

   pour $x \in [a,b]$.
   Calculer $g(a)$ et $g(b)$.
2. En utilisant le théorème de Rolle, prouver qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, puis conclure.

**Exercice 18.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$.

1. Prouver que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$, et que cette solution est dans $[0;1]$. On la note $\alpha$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

   Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
3. Montrer par récurrence que $u_n \in [0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier l'inégalité :

$$\forall x \in [0;1],\ |f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

6. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 19 (🏛 🏅).**

1. Prouver que l'équation $4-\ln x = x$ a une unique solution $\alpha$ dans $]0;+\infty[$ et justifier l'encadrement $2 \leq \alpha \leq 4$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$. où
$$g : ]0;+\infty[ \to \mathbb{R}, x \mapsto 4-\ln x.$$
On note $I = [2;4]$.
   a. Montrer par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Justifier l'inégalité :
$$\forall x \in I,\ |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$
   c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
   d. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 20 (🏛 🏅).**
Soit $P$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- $u_0 = 4$.
- Si $M_n$ est le point de $P$ d'abscisse $u_n$, la tangente à $P$ au point $M_n$ coupe l'axe des abscisses en $u_{n+1}$.

1. Faire une figure et construire sur l'axe des abscisses $u_1$ et $u_2$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où
$$f : ]0;+\infty[ \to ]0;+\infty[,\ x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}.$$
3. Étudier les variations de $f$ et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 4$.
4. Justifier l'inégalité :
$$\forall x \in [2;4],\ |f'(x)| \leq \frac{3}{8}.$$
5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$|u_n - 2| \leq 2\left(\frac{3}{8}\right)^n.$$
6. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 21 (🏛).**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée $n$-ième des fonctions :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{100}$.
2. $g : \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+2}$.

**Exercice 22 (🏅).**

1. La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ ?
2. La fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 23 (🏛 🏅).**
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la dérivée $n$-ième des fonctions :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left(x^2 + 2x\right) e^{-x}$.
2. $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$.

**Exercice 24 (🏅).**

1. Soit $n$ un entier naturel non nul. En calculant de deux façons différentes la dérivée $n$-ième de la fonction $f : x \mapsto x^{2n}$, démontrer la formule
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
2. Redémontrer la formule par un raisonnement de dénombrement.

**Exercice 25 (🏛).**
Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition ?

1. $f : x \mapsto \arctan\left(1 - \cos^2 x\right)$.
2. $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.
3. La réciproque de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.