Chapitre 15 : Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

I. Espaces vectoriels

Définition 1

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (en abrégé $\boxed{\mathbb{K}\text{-ev}}$) est un ensemble non vide E, dont les éléments sont appelés des vecteurs et muni de deux opérations :

- Une opération « interne », notée $+$, qui permet d'ajouter deux vecteurs : si u et v sont deux vecteurs, on peut calculer le vecteur $u+v$.
- Une opération « externe », notée $\cdot$, qui permet de multiplier un vecteur par un scalaire : si u est un vecteur et λ un scalaire, on peut calculer le vecteur $\lambda \cdot u$.

Les lois $+$ et $\cdot$ doivent de plus vérifier certaines conditions :

La loi $+$:

- est commutative : pour tous vecteurs u, v,
$$u+v=v+u.$$
- est associative : pour tous vecteurs u, v, w,
$$(u+v)+w=u+(v+w).$$
- admet un élément neutre, noté 0_E (vecteur nul). Cela signifie que pour tout vecteur u,
$$u+0_E=0_E+u=u.$$
- est telle que tout vecteur u admet un opposé, noté $-u$:
$$u+(-u)=0_E.$$

Pour tous vecteurs u, v, pour tous scalaires λ, μ :

- $1\cdot u=u$
- $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v.$
- $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u.$
- $\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u.$

Remarque.

Nous n'utiliserons jamais cette définition lorsqu'il s'agira d'établir qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Exemple 1

$\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-ev lorsqu'on le munit des opérations :

- $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$.
- $\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.

Son élément neutre est $0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$.

Il y a bien sûr un lien entre l'exemple précédent et les coordonnées des vecteurs de l'espace[1] : si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}.$$

Exemple 2

L'exemple précédent se généralise à $\mathbb{R}^n$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 : les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont les n-uplets de réels $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. L'élément neutre de $\mathbb{R}^n$ est $0_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{n \text{ termes}}$.

Exemple 3

L'ensemble des matrices à deux lignes et deux colonnes à coefficients réels est un $\mathbb{R}$-ev, noté $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$M+N = \begin{pmatrix}a+a' & b+b'\\c+c' & d+d'\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot M = \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\\lambda c & \lambda d\end{pmatrix}.$$

Remarque. On s'intéressera généralement à des $\mathbb{R}$-ev, mais la plupart des exemples se généralisent à $\mathbb{C}$.

Exercices

Exercice 1

Les espaces vectoriels de référence sont recensés dans le tableau ci-dessous :

Espaces vectoriels	**Description**
$\mathbb{K}^n$	n-uplets de scalaires
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$	suites à valeurs dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}^I = \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$	fonctions $I \to \mathbb{K}$
$\mathbb{K}[X]$	polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}_n[X]$	polynômes de degré au plus n
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	matrices à n lignes et p colonnes

Remarque.
Le cas de $\mathbb{K}^n$ est un cas particulier de la situation générale suivante : si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-ev, alors leur produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-ev lorsqu'on le munit de l'addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + \left(y_1, \ldots, y_n\right) = \left(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\right)$$

et de la multiplication externe

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

1. On parle ici de vecteur au sens de la géométrie.

II. Sous-espaces vectoriels

Déf.2 Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On dit que F est un sous-espace vectoriel (en abrégé $\boxed{\text{sev}}$) de E si $F \subset E$ et si F est un $\mathbb{K}$-ev pour les mêmes lois $+$ et $\cdot$ que E.

Exemples 4

1. Quel que soit le $\mathbb{K}$-ev E, $\{0_E\}$ et E sont des sev de E.
2. Pour tout entier naturel n, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors F est un sev de E si, et seulement si :

- $F \subset E$.
- $0_E \in F$.
- Pour tous vecteurs u, v dans F, pour tous scalaires λ, μ, on a $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Remarques.

- On peut remplacer la 3$^{\text{e}}$ condition de la définition qui précède par les deux autres conditions :
$$\forall u, v \in F,\ u+v \in F \quad \text{et} \quad \forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u \in F.$$
- Si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs d'un sev F et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, alors
$$(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n) \in F$$
(preuve par récurrence – cf exercices).

Exemple 5

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in E \mid x + y = 1\}$.
F n'est pas un sev de E, car $0_E = (0, 0) \notin F$ – puisque $0 + 0 \neq 1$.

Exemple 6

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et
$$F = \left\{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \lim u_n = 0\right\}.$$
F est un sev de E, car :

- $F \subset E$ par définition.
- $0_E = (0, 0, \cdots)$ (la suite nulle) appartient à F, car elle a une limite nulle.
- si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans F (donc $\lim u_n = \lim v_n = 0$) et si λ, μ sont deux réels, alors
$$\lim \left(\lambda u_n + \mu v_n\right) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$
(par opération sur les limites de suites), donc $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.

Exemple 7

Soient $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.
F est un sev de E, car :

- $F \subset E$ par définition.
- $P = 0_E$ (le polynôme nul) appartient à F, car il vérifie $P(1) = 0$.
- si P et Q sont dans F et si λ, μ sont deux réels, alors
$$\left(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q\right)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0,$$
donc $\lambda \cdot P + \mu \cdot Q \in F$.

Exercices

Exercices 2 et 3

Déf. 3

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. L'espace vectoriel engendré par $u_1, u_2, \ldots, u_n$, noté $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_i :

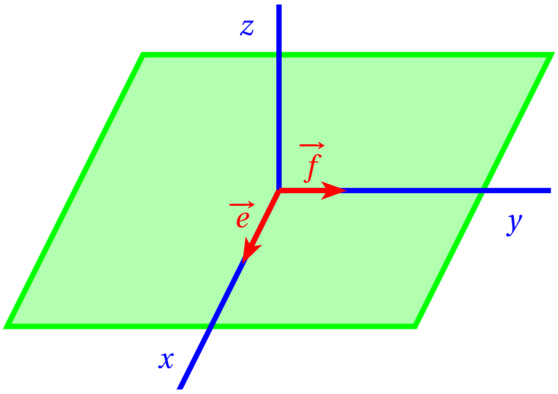
$$\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Exemple 8

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,0,0)$ et $v(0,1,0)$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}(u, v) &= \{\lambda_1 u + \lambda_2 v \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

$\operatorname{Vect}(u, v)$ s'identifie géométriquement au plan passant par $O(0,0,0)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{f}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ – on parle de « plan vectoriel ».



Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des vecteurs de E.

1. Si $v \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, alors $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$.
2. Si F et G sont deux sev de E, alors $F \cap G$ est un sev de E.
3. $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est le plus petit sev de E contenant les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
4. Si F est un sev de E, alors

$$\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \subset F \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ u_i \in F.$$

Démonstration (du point 4)

Partie directe. On suppose $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \subset F$. Chacun des u_i est dans $\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, puisqu'il s'écrit $0 \cdot u_1 + \cdots + 1 \cdot u_i + \cdots + 0 \cdot u_n$, donc il appartient à F d'après l'hypothèse.

Partie réciproque. On suppose que chacun des u_i appartient à F.
Soit $v \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. On peut l'écrire

$$v = \lambda_1 \cdot \underset{\in F}{u_1} + \lambda_2 \cdot \underset{\in F}{u_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \underset{\in F}{u_n}.$$

Le vecteur v est une combinaison linéaire de vecteurs de F, et F est un sev de E, donc $v \in F$.

Proposition 3

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sev de $\mathbb{K}^p$.

Exemple 9

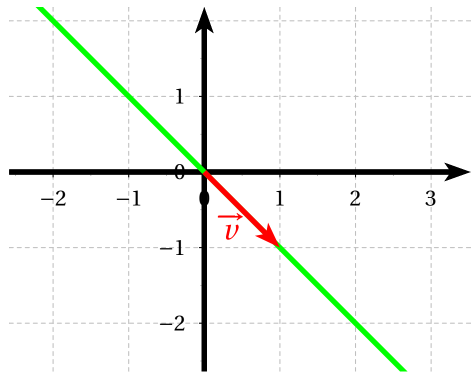
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \left\{(x, y) \in E \mid x + y = 0\right\}$.
F est un sev de E comme ensemble des solutions du système de 1 équation à 2 inconnues $x + y = 0$.

Soit $u = (x, y) \in E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x + y = 0 \iff y = -x \\ &\iff u = (x, -x) \iff u = x(1, -1), \end{aligned}$$

donc $F = \operatorname{Vect}\left((1, -1)\right)$. C'est une autre façon de prouver que F est un sev de E.

Remarque.
F s'identifie géométriquement à la droite du plan passant par $O(0, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ – on parle de « droite vectorielle ».



Exemple 10

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $E' = \{P \in E \mid P(1) = P(-1) = 0\}$.
E' est l'intersection des deux sev [a]

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{P \in E \mid P(-1) = 0\},$$

donc E' est un sev de E.
On peut le prouver d'une autre manière en écrivant

$$P \in E \iff P(1) = P(-1) = 0 \iff ((X-1)|P \text{ et } (X+1)|P) \iff (X-1)(X+1)|P \iff \left(X^2 - 1\right)|P.$$

E' est donc l'ensemble des polynômes de la forme $\left(X^2 - 1\right)Q(X)$, avec Q de degré au plus 1. On vérifie sans peine qu'il s'agit bien d'un sev de E.

Une troisième méthode consiste à poser $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et à raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} P \in E' &\iff \begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 & L_1 \\ -a + b - c + d = 0 & L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ 2b + 2d = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c + d = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ b + d = 0 & L_2 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + c = 0 & L_1 \longleftarrow L_1 - L_2 \\ b + d = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$P \in E' \iff (c = -a \text{ et } d = -b) \iff P(X) = aX^3 + bX^2 - aX - b \iff P(X) = a\left(X^3 - X\right) + b\left(X^2 - 1\right).$$

On a donc $E' = \operatorname{Vect}\left(X^3 - X, X^2 - 1\right)$.

a. Voir exemple 7 pour F – la preuve est identique pour G.

Remarque.
E' est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $X^3 - X$ et $X^2 - 1$.

Exercices

Exercices 4 à 10

Déf. 4 Soient F, G deux sev d'un ev E. La somme de F et G, notée $F+G$, est définie par

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$

Proposition 4

$F + G$ est le plus petit sev de E contenant à la fois F et G.

Exemple 11

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x, y) \in E \mid y = z = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y) \in E \mid x = z = 0\right\}$.

Soit $u = (x, y, z) \in E$. On a les équivalences

$$u \in F \iff y = z = 0 \iff u = (x, 0, 0) \iff u = x(1, 0, 0),$$

donc $F = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$.
De même,

$$u \in G \iff x = z = 0 \iff u = (0, y, 0) \iff u = y(0, 1, 0),$$

donc $G = \mathrm{Vect}((0, 1, 0))$.
Donc
$$F + G = \left\{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 0), (0, 1, 0)\right)$$

– on retrouve le plan vectoriel de l'exemple 8.

Déf. 5 Soient F, G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On dit que la somme $F + G$ est directe si, pour tout vecteur $w \in F + G$, il existe un unique couple de vecteurs $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$. On note alors $F + G = F \oplus G$.

Proposition 5

Deux sev F et G d'un $\mathbb{K}$-ev E sont en somme directe si, et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple 12

Dans l'exemple 11, la somme $F + G$ est directe : si $u(x, y, z) \in F \cap G$, alors $y = z = 0$ et $x = z = 0$, donc $x = y = z = 0$; et donc $u = 0_E$.

Dans l'exemple 10, la somme $F + G$ n'est pas directe, car $\left(X^2 - 1\right) \in F \cap G$.

Démonstration (de la proposition 5)

Par double implication.

Partie directe. On suppose que la somme $F+G$ est directe.
Soit $w \in F \cap G$. On peut écrire $w = \underset{\in F}{w} + \underset{\in G}{0} = \underset{\in F}{0} + \underset{\in G}{w}$, donc par unicité de la décomposition d'un vecteur de $F+G$ (en l'occurrence w) comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on a $w=0$.
Conclusion : $F \cap G \subset \{0_E\}$. Réciproquement, $0_E \in F \cap G$ (car F et G sont des sev de E, donc ils contiennent tous deux le vecteur nul), donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Partie réciproque. On suppose que $F \cap G = \{0_E\}$.
Soit $w \in F+G$. Supposons qu'on puisse l'écrire de deux façons comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$w = \underset{\in F}{u_1} + \underset{\in G}{v_1} = \underset{\in F}{u_2} + \underset{\in G}{v_2}.$$

On a donc

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in F,\text{ car } F \text{ sev de } E} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in G,\text{ car } G \text{ sev de } E}.$$

Or $F \cap G = \{0_E\}$, donc $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$; et ainsi $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. La décomposition du vecteur w comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est donc unique.

Déf.6 Soient F, G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On dit que F et G sont supplémentaires si $E = F \oplus G$.

Méthode

D'après ce qui précède, F et G sont supplémentaires si, et seulement si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- Tout vecteur $w \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $w = u+v$, avec $u \in F$, $v \in G$.
- $E = F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercices

Exercices 11 à 13

III. Familles de vecteurs, bases

Nous revenons vers les notions de familles génératrices et libres, que nous avons évoquées dans le chapitre n°11. Nous écrirons indifféremment $\lambda \cdot u$ ou λu.

Définition 7 Soit $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est :

- liée s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$ tel que
$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E ;$$
- libre si elle n'est pas liée ;
- génératrice de E si $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Exemple 13

On considère les vecteurs $u_1 = (1,-2,1)$, $u_2 = (3,1,0)$, $u_3 = (1,-,1,2)$ de $E = \mathbb{R}^3$. La famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle génératrice de E ? Est-elle libre ?

Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur de E. Existe-t-il un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = u\,?$$

Cette égalité se réécrit

$$\begin{gathered}\lambda_1(1,-2,1) + \lambda_2(3,1,0) + \lambda_3(1,-1,2) = (\alpha,\beta,\gamma)\\ (1\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1\lambda_3, -2\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3, 1\lambda_1 + 0\lambda_2 + 2\lambda_3) = (\alpha,\beta,\gamma),\end{gathered}$$

ou encore

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = \alpha \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = \beta \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = \gamma \end{cases}.$$

Ce système a une unique solution, car la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 3 (voir l'exemple 22 du chapitre n°11, ou l'exemple 22 plus loin dans ce cours) ; donc la famille $\mathscr{F}$ est génératrice.

Avec le même argument (matrice A de rang 3), on voit que si $u = 0_E$, la seule solution du système est $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$. La famille $\mathscr{F}$ est donc libre.

Proposition 6

Si $\mathscr{F} = (P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés (c-à-d que les P_i ont tous des degrés différents), alors $\mathscr{F}$ est libre.

Exemple 14

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $\left(X^2 - 1, X + 3, -1\right)$ est libre.

Proposition 7

Soient $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_k)$ et $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ deux familles de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

1. Si $\mathscr{F}'$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est libre.
2. Si $\mathscr{F}$ est génératrice, alors $\mathscr{F}'$ est génératrice.
3. Si $v \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et si $\mathscr{F}$ est libre, alors $(u_1, \ldots, u_k, v)$ est libre.
4. Si $\mathscr{F}'$ est libre, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$ et $\mathrm{Vect}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ sont en somme directe.

Exercices

Exercices 14 et 15

Déf.8 Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle base de E toute famille libre et génératrice de E.

Exemple 15

On reprend l'exemple 10 : $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $E' = \{P \in E \mid P(1) = P(-1) = 0\}$.

On a vu que $E' = \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, avec $\mathscr{B} = \left(X^3 - X, X^2 - 1\right)$. La famille $\mathscr{B}$ est libre, puisqu'elle est échelonnée en degrés, donc c'est une base de E'.

Certains espaces vectoriels usuels admettent une base simple, que l'on appelle la base canonique :

Proposition 8 (bases canoniques)

1. La famille $\mathscr{B} = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. La famille $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. La famille $\mathscr{B} = \left(E_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où E_{ij} est la matrice dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et tous les autres 0.

Exemples 16

1. $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
2. $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
3. $\mathscr{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercices

Exercices 16 à 19

Proposition 9

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E. Dans ce cas, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des e_i :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Démonstration

Existence. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, elle est génératrice et x peut s'écrire comme une combinaison linéaire des e_i.

Unicité. Supposons que l'on ait les deux décompositions

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = x'_1 e_1 + x'_2 e_2 + \dots + x'_n e_n,$$

et donc

$$\left(x_1 - x'_1\right) e_1 + \left(x_2 - x'_2\right) e_2 + \dots + \left(x_n - x'_n\right) e_n = 0_E.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, elle est libre et l'on a

$$x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = \dots = x_n - x'_n = 0.$$

On en déduit $x_i = x'_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et donc l'unicité de la décomposition de x.

Définition 9

Dans la proposition qui précède, on dit que :

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$,
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Cette matrice est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Exemple 17

On considère dans $E = \mathbb{R}^2$ le vecteur $x = (2, -3)$. On peut écrire

$$x = 2(1,0) - 3(0,1) = 2e_1 - 3e_2,$$

où $\mathscr{B} = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercices 20 et 21

IV. Dimension d'un espace vectoriel

Déf.10

Un $\mathbb{K}$-ev E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Exemples 18

1. $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, car la base canonique $\mathscr{B} = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ est génératrice.
2. $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels) n'est pas de dimension finie (preuve en exercices).

Théorème 1 (de la base extraite)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E. En particulier, un espace de dimension finie admet une base.

Exemple 19

La famille $\mathscr{F} = \left(1, X+1, X-1, X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, puisqu'elle engendre la base canonique $\left(1, X, X^2\right)$ (pour X, il suffit d'écrire $X = (X+1) - 1$). On peut donc en extraire une base.

La famille $\mathscr{B} = \left(1, X+1, X^2\right)$ (par exemple) convient :

- elle est libre, car échelonnée en degrés.
- elle est génératrice, puisqu'elle engendre la base canonique.

Remarque.
En général, pour passer d'une famille génératrice à une base, on enlève un vecteur de la famille génératrice qui est une combinaison linéaire des autres, puis un deuxième, ..., jusqu'à avoir une famille libre.
C'est ce que nous avons fait dans l'exemple précédent : partant de la famille $\mathscr{F} = \left(1, X+1, X-1, X^2\right)$, on a enlevé le vecteur $X-1$, qui peut s'écrire $(X+1)-2\times 1$.
On a obtenu la famille $\mathscr{B} = \left(1, X+1, X^2\right)$, qui est libre. Étant également génératrice, c'est une base de E.

Théorème 2 (de la base incomplète)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $\mathscr{E} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$ une famille libre de E. Alors il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ tels que $\mathscr{F} = \left(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ soit une base de E.

Remarque.
Si $\mathscr{E} = \left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est génératrice, il n'y a rien à y ajouter pour obtenir une base.

Théorème 3

Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E ont le même cardinal, que l'on appelle dimension de E. On note ce nombre $\dim(E)$.

Par convention, $\dim\left(\{0_E\}\right) = 0$.

Exemples 20 (à connaître par cœur)

1. $\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n$.
2. $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$.
3. $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(K)\right) = n \times p$.

Exemple 21

Soient $e_1 = (1,0,2)$, $e_2 = (1,-1,3)$, $e_3 = (0,1,1)$, $e_4 = (2,4,-1)$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^3$. La famille $\mathscr{F} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ n'est pas une base, car elle est de cardinal 4 et E est de dimension 3.

Si on voulait le prouver sans utiliser le théorème qui précède, il faudrait prouver que l'équation

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0_E$$

a une solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$.
Il revient au même de prouver que le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & 2\lambda_4 & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 4\lambda_4 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & - & \lambda_4 & = & 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

a une solution non nulle.
C'est une conséquence des résultats du chapitre n°11, puisque le système est compatible et que son rang $(r \leq 3)$ est strictement inférieur au nombre de colonnes $(p = 4)$.

Remarque.
D'une manière générale, une famille de $n+1$ vecteur d'un espace vectoriel de dimension n sera toujours liée.

Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathscr{F} = \left(x_1, \ldots, x_p\right)$ une famille de vecteurs de E.

- On appelle rang de $\mathscr{F}$ la dimension de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.
- Si E est de dimension n et si $\mathscr{B}$ est une base de E, ce rang est aussi celui de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$, c'est-à-dire la matrice de taille $n \times p$ dont la colonne j est $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\left(x_j\right)$.

Exemple 22

On cherche le rang de la famille $\mathscr{F} = \left(\underbrace{X^3+X-1}_{x_1}, \underbrace{X^3-3X^2-X+1}_{x_2}, \underbrace{3X^2+2X-2}_{x_3}\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

On note $\mathscr{B} = \Big(\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{X}, \underset{e_3}{X^2}, \underset{e_4}{X^3}\Big)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a par exemple :

$x_2 = 1 - X - 3X^2 + X^3 = 1\cdot e_1 - 1\cdot e_2 - 3\cdot e_3 + 1\cdot e_4$

(cf colonne rose ci-contre).

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \\ \leftarrow e_4 \end{array}$$

On opère sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array}$$

La matrice est réduite échelonnée en lignes et elle a deux pivots, donc le rang de la famille $\mathscr{F}$ est égal à 2.

Exercices

Exercice 22

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La famille $\mathscr{F}$ est libre.
2. La famille $\mathscr{F}$ est génératrice.
3. La famille $\mathscr{F}$ est une base de E.

Remarque.
Dans un espace de dimension n, une famille libre a toujours au plus n éléments, et une famille génératrice a toujours au moins n éléments.

Exemple 23

La famille $\mathscr{F} = \left(1, X-2, X^2-3X+4\right)$ est une famille libre (puisque échelonnée en degrés) de cardinal 3 de $\mathbb{R}_2[X]$.
Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercices
Exercices 23 à 25

V. Dimension des sous-espaces vectoriels

Proposition 11

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et si F est un sev de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, on a l'équivalence :

$$\dim(F) = \dim(E) \iff F = E.$$

Proposition 12 (formule de Grassmann)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soient F, G deux sev de E. Alors

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier, F et G sont en somme directe si, et seulement si $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration (idée seulement)

On donne l'idée de la démonstration seulement : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $F \cap G$, que l'on complète via le théorème de la base incomplète en :

- une base $\left(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_q\right)$ de F ;
- une base $\left(e_1, \dots, e_n, g_1, \dots, g_r\right)$ de G.

Pour prouver la proposition, il suffit de prouver que $\mathscr{F} = \left(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r\right)$ est une base de $F+G$. En effet, on aura alors

$$\dim(F+G) = n+q+r = (n+q)+(n+r)-n = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Resterait donc à prouver que $\mathscr{F}$ est une base de $F+G$, ce que l'on fait en prouvant qu'elle est génératrice (facile) et libre (plus difficile).

Exemple 24

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $E' = \{P \in E \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ (cf exemple 10).
E' est l'intersection des deux sev

$$F = \{P \in E \mid P(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{P \in E \mid P(-1) = 0\}.$$

Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ un élément de E. On a les équivalences

$$\begin{aligned} P \in F &\iff P(1) = 1 \iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff P(X) = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \\ &\iff P(X) = a_1(X-1) + a_2\left(X^2 - 1\right) + a_3\left(X^3 - 1\right) \\ &\iff P \in \operatorname{Vect}\left(X-1, X^2-1, X^3-1\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $F = \operatorname{Vect}\left(X-1, X^2-1, X^3-1\right)$; et comme la famille $\left(X-1, X^2-1, X^3-1\right)$ est libre (car échelonnée en degrés), F est de dimension 3. On prouve de même que G est de dimension 3.

Par ailleurs, $F \subset F + G$, et cette inclusion est stricte, puisque le polynôme $X + 1$ par exemple est dans G (et donc dans $F + G$), mais pas dans F. On a donc

$$3 = \dim(F) < \dim(F+G) \leq \dim(E) = 4,$$

et ainsi $\dim(F+G) = 4$. On en déduit $F + G = E$.

Finalement, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim\left(E'\right) = \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Remarque.
On pouvait aussi bien sûr reprendre le raisonnement de l'exemple 10 : on a vu que $E' = \operatorname{Vect}\left(X^3 - X, X^2 - 1\right)$, donc $\dim\left(E'\right) = 2$.

La proposition 13 ci-dessous est une conséquence du théorème de la base incomplète :

Proposition 13

Tout sev F d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie admet un supplémentaire : il existe un sev G de E tel que $E = F \oplus G$.

Attention

Il n'y a pas unicité du supplémentaire. Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, le sev $F = \operatorname{Vect}((1,0))$ admet pour supplémentaire $G_1 = \operatorname{Vect}((0,1))$, mais aussi $G_2 = \operatorname{Vect}((1,1))$: on a bien

$$E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2 \ldots$$

... et pourtant $G_1 \cap G_2 = \{0_E\}$.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient F et G deux sev de E, soit $\left(f_1, \ldots, f_p\right)$ une base de F et $\left(g_1, \ldots, g_q\right)$ une base de G. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\left(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, q_q\right)$ est une base de E.

Sous ces conditions, la base $\left(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, q_q\right)$ de E s'appelle base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Exercices

Exercices 26 à 32

VI. Exercices

Exercice 1.
Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev? Le cas échéant, préciser l'élément neutre.

1. L'ensemble E des polynômes de degré exactement égal à 2.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
3. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \times y = 0\}$.
4. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|\}$.
5. L'ensemble des suites à coefficients réels.
6. $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, I étant un intervalle réel.

Exercice 2 (🏛).
Dans chaque cas, dire si F est un sev de E ou non. Justifier.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in E \mid 2x = 3y\}$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E \mid P'(0) = 0\}$.
3. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in E \mid x+y+z = 1\}$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid u \text{ converge}\}$.
5. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $F = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a+d = 0\right\}$.
6. a et b sont deux réels. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f \text{ est sol. de l'EDL } y' = ay + b\}$.
7. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f \text{ croissante}\}$.
8. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x,y,z) \in E \mid x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$.
9. $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 0)$, $F = \{P \in E \mid P(2) = P(-2)\}$.
10. $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f \text{ bornée}\}$.

Exercice 3 (🏛).
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E. Prouver que $F \cap G$ est un sev de E.

Exercice 4 (🏛).
On reprend la question 5 de l'exercice 2 : prouver que $F = \left\{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+d = 0\right\}$ est un sev de $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ en l'écrivant $F = \text{Vect}(\cdots)$.

Exercice 5 (🏛).
On reprend la question 8 de l'exercice 2 : prouver par une méthode rapide que

$$F = \{(x,y,z) \mid x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$$

est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (🏛).

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $v = (5,5,1)$ est-il une combinaison linéaire de $u_1 = (2,3,0)$ et $u_2 = (3,2,0)$?
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $v = 16X^3 - 7X^2 + 21X - 4$ est-il une combinaison linéaire de $u_1 = 8X^3 - 5X^2 + 1$ et $u_2 = X^2 + 7X - 2$?
3. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $v = x \mapsto \sin(2x)$ est-elle une combinaison linéaire de $u_1 : x \mapsto \cos x$ et $u_2 : x \mapsto \sin x$?

Exercice 7 (🏛).
Émile achète pour sa maman une bague contenant 2g d'or, 5g de cuivre et 4g d'argent. Il la paie 6200 euros. Paulin achète pour sa maman une bague contenant 3g d'or, 5g de cuivre et 1g d'argent. Il la paie 5300 euros. Frédéric achète pour sa chérie une bague contenant 5g d'or, 12g de cuivre et 9g d'argent. Combien va-t-il la payer?

Exercice 8.

1. On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x,y,z) \mid x + 2y - z = 0\}$.
   Prouver que F est un sev de $\mathbb{R}^3$ en l'écrivant $F = \text{Vect}(\cdots)$.
2. Expliquer pourquoi les solutions du système $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$ forment un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9.
Le produit scalaire est défini dans $E = \mathbb{R}^3$ de la façon suivante : si $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$, leur produit scalaire est le nombre

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'.$$

On dit que u et v sont orthogonaux si $u \cdot v = 0$. On note $u \perp v$.

Soient $a = (1,-2,3)$ et $F = \{u = (x,y,z) \in E \mid a \perp u\}$. Prouver que F est un sev de E et en donner une famille génératrice.

Exercice 10.
Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F un sev de E.
Démontrer par récurrence que si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs de F et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, alors

$$(\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n) \in F$$

Exercice 11 (🏛).
Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X, X^2\right)$.

1. Prouver que $E = F + G$.

Indication : prendre $P = aX^2 + bX + c$ et écrire

$$P = aX^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right) X + \frac{c}{2}(-X + 2).$$

2. La somme est-elle directe ?

Exercice 12 (🏛).
Les suites de l'exercice sont à valeurs réelles. On considère :

- $E = \left\{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\right\}$,
- $F = \left\{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim u_n = 0\right\}$,
- $G = \left\{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid u \text{ constante}\right\}$.

1. Prouver que F et G sont deux sev de E.

2. Prouver que $E = F \oplus G$ de deux façons différentes :

a. En prouvant que $E = F + G$ et que $F \cap G = \{0_E\}$.

b. En prouvant à l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse que tout vecteur $w \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $w = u + v$, avec $u \in F$, $v \in G$.

Exercice 13 (🏅).
Soient $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E \mid f \text{ paire}\right\}$ et $G = \left\{f \in E \mid f \text{ impaire}\right\}$.

1. En raisonnant par analyse-synthèse, prouver que $E = F \oplus G$.

2. Décomposer la fonction exp dans la somme $F \oplus G$.

Exercice 14 (🏛).
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$: $\mathscr{F} = ((1,2), (2,1))$.

2. Dans $E = \mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{F} = ((1,2,-1), (1,0,1), (-1,2,-3)).$$

3. Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$:

$$\mathscr{F} = \left((X+1)^3, (X+1)^2, (X+1), 1\right).$$

4. Dans $E = \mathbb{R}[X]$:

$$\mathscr{F} = \left(X^2 - X + 1, 2X^2 + X, 3X - 2\right).$$

Exercice 15 (🏅).
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ?

1. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\mathscr{F} = \left(f_1, f_2, f_3\right)$, où

$$f_k : x \longmapsto \sin(x + k).$$

2. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\mathscr{F} = \left(f_1, f_2, f_3\right)$, où

$$f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}.$$

Exercice 16 (🏛).
Déterminer une base de

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}.$$

Exercice 17 (🏛).
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de

$$F = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

Exercice 18 (🏛).
Déterminer une base de

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\right\}.$$

Exercice 19 (🏛).
Prouver que $\mathbb{R}[X]$ n'admet pas de base finie.

Exercice 20 (🏛).
Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer les coordonnées de $v = (1,1,1)$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 21 (🏛).
Montrer que $\mathscr{B} = \left(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\right)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^3 - 2X^2 + 4X - 5$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 22 (🏛).
Déterminer le rang de la famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{F} = ((1,-2,1), (3,1,0), (5,-3,2), (1,5,-2)).$$

Exercice 23 (🏛).
Montrer que $P_1 = (X-1)^2$, $P_2 = X^2$, $P_3 = (X+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 24 (🏛).
Montrer que $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, forment une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 25 (🏛).
Prouver que

$$\mathscr{B} = ((1,0,0,0),(2,1,0,0),(-1,0,3,0),(3,1,-2,2))$$

est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 26 (🏛).
Soit $E = \mathbb{R}^3$.

1. Prouver que $F = \{(x,y,z) \in E \mid x+2y-3z=0\}$ est un sev de E et en donner une famille de deux vecteurs générateurs.
2. On pose $G = \mathrm{Vect}((1,2,-3))$. Déterminer $F \cap G$.
3. En utilisant la formule de Grassmann, prouver que $E = F \oplus G$.

Exercice 27 (🏛).
Soient F, G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie tels que

$$\dim(F) + \dim(G) > \dim(E).$$

Prouver que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

Exercice 28 (🏛).
Soient F, G les sev de $\mathbb{R}^3$ définis par :

- $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\}$;
- $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+2z=0\}$.

Déterminer les dimensions de F et G. Sont-ils supplémentaires ?

Exercice 29 (🏛).
Les sev de $\mathbb{R}^3$ définis par

- $F = \{(a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$;
- $G = \{(b+c,b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\}$.

sont-ils supplémentaires ?

Exercice 30 (🏛).
Déterminer un supplémentaire de l'espace F défini dans l'exercice 18.

Exercice 31 (🏛).
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, H un sev de E de dimension $n-1$ et $v \in E \setminus H$.
Prouver que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$.

Exercice 32 (🏅).
La transposée d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice ${}^tM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par ${}^tM_{i,j} = M_{j,i}$.

1. Écrire la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On note :
   - S l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'elles vérifient ${}^tM = M$;
   - A l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'elles vérifient ${}^tM = -M$.

   a. Prouver que S et A sont des sev de $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ et déterminer leurs dimensions respectives.

   b. Prouver que $\mathscr{M}_3(\mathbb{K}) = S \oplus A$.