Chapitre 14 : Limites et continuité

Dans ce chapitre, sauf mention explicite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. La notation $\overline{\mathbb{R}}$ désigne $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

I. Limites de fonctions

On commence par les limites en $+\infty$. On donne des définitions analogues à celles que nous avions pour les limites de suites :

Définition 1

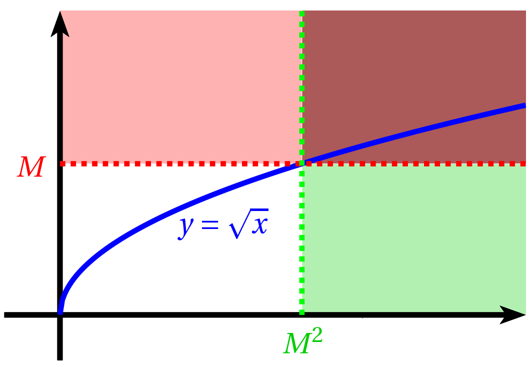
- Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in [a; +\infty[, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$
- Soit $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si
$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in [a; +\infty[, x \geq A \implies f(x) \geq M.$$
- On définit de même les limites en $-\infty$, et les limites valant $-\infty$.

Proposition 1

Soient $a \in \{+\infty; -\infty\}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet pour limite ℓ en a, alors cette limite est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 1

Soit $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.
On prouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Soit $M > 0$. On pose $A = M^2$. On a les implications :

$$\begin{aligned} & x && \geq A \\ \implies & x && \geq M^2 \\ \implies & \sqrt{x} && \geq \sqrt{M^2} \qquad \text{(car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ strict. } \nearrow \text{ sur }]0; +\infty[) \\ \implies & \sqrt{x} && \geq M \end{aligned}$$

Conclusion : si $x \geq M^2$, alors $f(x) \geq M$.

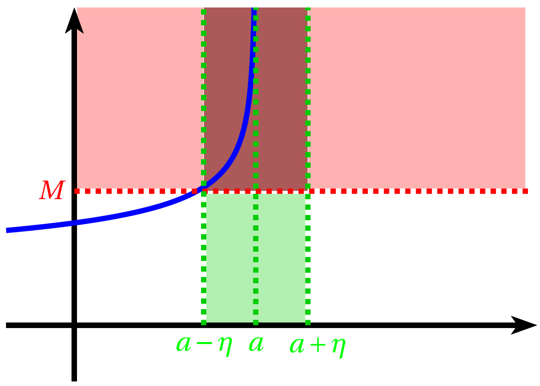
Ceci est vrai pour tout $M > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On s'intéresse maintenant à la limite en un point a :

Définition 2

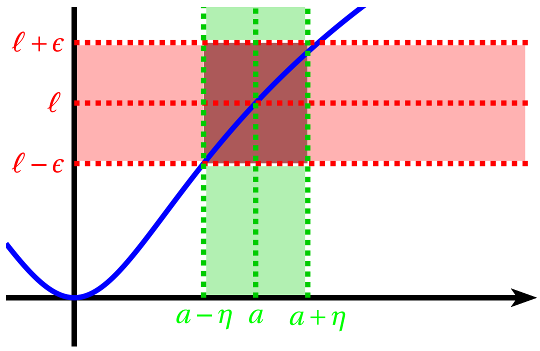
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a une extrémité de I. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a si

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \le \eta \implies f(x) \ge M.$$



- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de I ou une extrémité de I, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite ℓ en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \le \eta \implies |f(x)-\ell| \le \epsilon.$$



Sur chacune des deux figures, quand x est dans la zone verte, $f(x)$ est dans la zone rouge.

- On définit de même une fonction de limite $-\infty$ en a.

Proposition 2

Soient a dans $\mathbb{R}$, ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si f admet pour limite ℓ en a, alors cette limite est unique. On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque.
L'inégalité $|x-a| \le \eta$ se réécrit $a-\eta \le x \le a+\eta$; et l'inégalité $|f(x)-\ell| \le \epsilon$ se réécrit $\ell-\epsilon \le f(x) \le \ell+\epsilon$. Donc l'implication $|x-a| \le \eta \implies f(x) \ge M$ se réécrit

$$a-\eta \le x \le a+\eta \implies f(x) \ge M.$$

Tandis que l'implication

$$|x-a| \le \eta \implies |f(x)-\ell| \le \epsilon$$

se réécrit

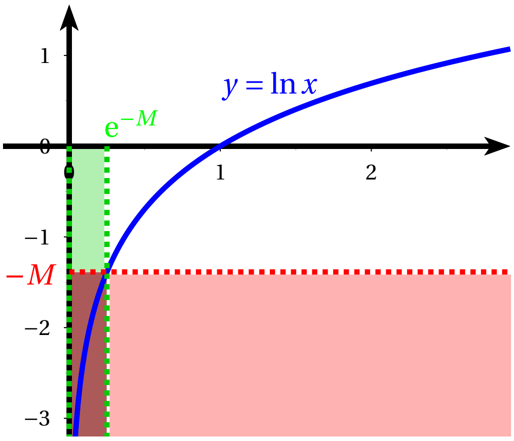
$$a-\eta \le x \le a+\eta \implies \ell-\epsilon \le f(x) \le \ell+\epsilon.$$

Proposition 3

Si f est définie en a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\ell = f(a)$.

Exemple 2

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$.
On prouve que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.



Soit $M > 0$. On pose $\eta = e^{-M}$. On a les implications :

$$\begin{array}{llll} & 0 & < x & \leq \eta \\ \Longrightarrow & 0 & < x & \leq e^{-M} \\ \Longrightarrow & & \ln x & \leq \ln\left(e^{-M}\right) \quad \text{(car ln strict. ↗ sur }]0;+\infty[) \\ \Longrightarrow & & \ln x & \leq -M \end{array}$$

Conclusion : si $0 < x \leq e^{-M}$, alors $f(x) \leq -M$.

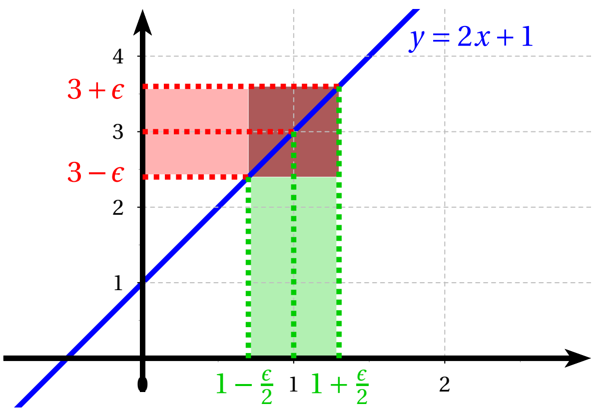
Ceci est vrai pour tout $M > 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Remarque. Pour trouver un η qui convienne, on écrit au brouillon les équivalences :

$$\ln x \leq -M \iff e^{\ln x} \leq e^{-M} \iff x \leq e^{-M}.$$

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+1$.
On prouve que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.



Soit $\epsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\epsilon}{2}$. On a les implications :

$$\begin{array}{llll} & 1-\eta & \leq x & \leq 1+\eta \\ \Longrightarrow & 1-\dfrac{\epsilon}{2} & \leq x & \leq 1+\dfrac{\epsilon}{2} \\ \Longrightarrow & -\dfrac{\epsilon}{2} & \leq x-1 & \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \text{(on retire 1)} \\ \Longrightarrow & -\epsilon & \leq 2x-2 & \leq \epsilon \quad \text{(on multiplie par 2)} \\ \Longrightarrow & 3-\epsilon & \leq 2x+1 & \leq 3+\epsilon \quad \text{(on ajoute 3)} \end{array}$$

Conclusion : si $1-\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq 1+\frac{\epsilon}{2}$, alors $3-\epsilon \leq f(x) \leq 3+\epsilon$.

Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

Exercices

Exercices 1 à 5

On étend la définition précédente avec les limites à droite et à gauche en un point a.

Définition 3

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de I ou une extrémité de I, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite à droite ℓ en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a, x > a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a, x > a}{\longrightarrow} \ell$.

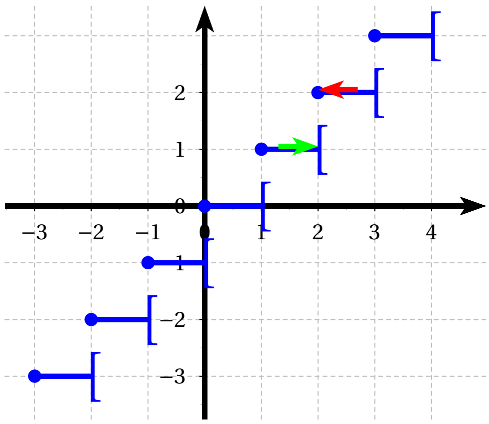
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a un point de I ou une extrémité de I, et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite à gauche ℓ en a si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a, x < a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a, x < a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque.
On définit de la même façon une limite à droite ou à gauche égale à $\pm\infty$.

Exemple 4



Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

On a par exemple :

$$\lim_{x \to 2, x > 2} f(x) = 2 \qquad \text{(flèche rouge)}$$

$$\lim_{x \to 2, x < 2} f(x) = 1 \qquad \text{(flèche verte)}$$

Proposition 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point à l'intérieur de I. Si f admet une limite en a, alors f admet une limite à droite et une limite à gauche en a.

Remarque.
La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple ci-dessus avec la partie entière.

On a déjà énoncé dans la leçon n°3 (*Généralités sur les fonctions*) :

- toutes les limites de référence ;
- toutes les règles de calcul sur les limites ;
- le théorème sur la limite d'une composée, le théorème de limite par comparaison et le théorème des gendarmes.

On renvoie le lecteur à cette leçon pour les énoncés de ces résultats, que nous utiliserons librement à partir de maintenant.

Exercices

Exercice 6

Proposition 5

Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite finie en un point $a \in I$, alors f est bornée dans un voisinage de a : il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tels que $x \in \,]a-\eta ; a+\eta[\, \cap I \implies |f(x)| \leq M$.

Théorème 1 (caractérisation séquentielle de la limite)

Soient ℓ et a dans $\overline{\mathbb{R}}$. La fonction f admet pour limite ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a, $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ.

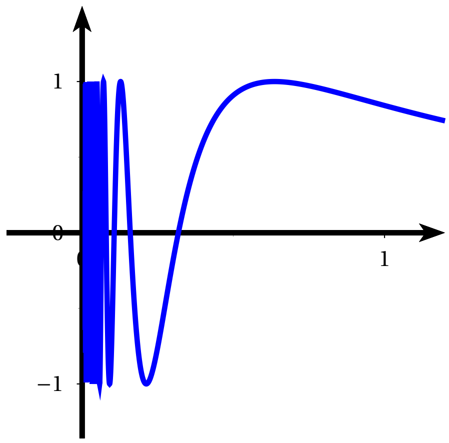
Exemple 5

Supposons que $(u_n)_{n\in N}$ converge vers 2. Que dire de la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_n = u_n^2$? On utilise le théorème 1 :

$$\left.\begin{array}{ll} \lim u_n & = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2} x^2 & = 2^2 = 4 \end{array}\right\} \implies \lim v_n = \lim u_n^2 = 4.$$

On retrouve ainsi toutes les opérations usuelles sur les limites de suites.

Exemple 6



Soit $f :]0;+\infty[, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Les suites définies par $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ $v_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ convergent vers 0 et

$$\sin(u_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \to 0,$$

$$\sin(v_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1.$$

D'après le théorème 1, la fonction f n'a pas de limite en 0.

Exercices

Exercice 7

Proposition 6 (limite monotone)

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante, avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Alors f admet une limite (à gauche) en b, qui est finie si f est majorée, qui vaut $+\infty$ sinon.

Remarque.
On a un résultat analogue avec la limite en a d'une fonction décroissante $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, etc.

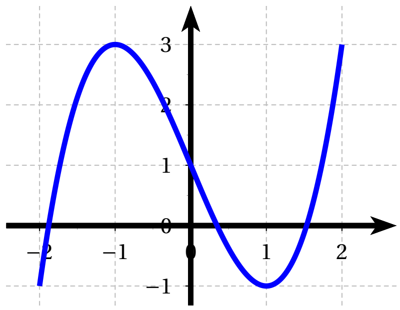
II. Continuité

Définition 4

- On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si elle a une limite en a. On a alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point $a \in I$.
- On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur I.

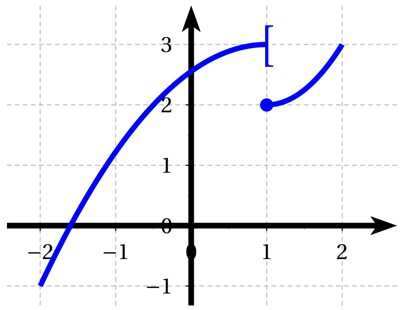
Exemples 7

1.



fonction continue sur $[-2;2]$

2.



fonction discontinue en $a = 1$

Remarque.
Intuitivement, une fonction f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative « sans lever le stylo ».

Proposition 7

1. Les fonctions usuelles (puissances, exponentielles, logarithmes, circulaires) sont continues sur leur ensemble de définition.
2. Si deux fonctions sont continues sur I, alors leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient [a] est continue sur I.
3. Si $u \in \mathscr{C}(I,J)$ et $v \in \mathscr{C}(J,\mathbb{R})$, alors $v \circ u \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$.

a. Si le dénominateur ne s'annule pas sur I.

Exemples 8

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2 \cos x}{e^x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $g :]2;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x-2)$ est continue sur $]2;+\infty[$.

Remarque.
On dit qu'une fonction f est continue à droite en a si $\lim_{x\to a, x>a} f(x) = f(a)$, qu'elle est continue à gauche en a si $\lim_{x\to a, x<a} f(x) = f(a)$.
Dans l'exemple 7.2, la fonction est continue à droite en 1, car $\lim_{x\to 1, x>1} f(x) = 2 = f(1)$, mais elle n'est pas continue à gauche, car $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = 3 \neq f(1)$.

Définition 5

Si f est définie sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} f(x) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

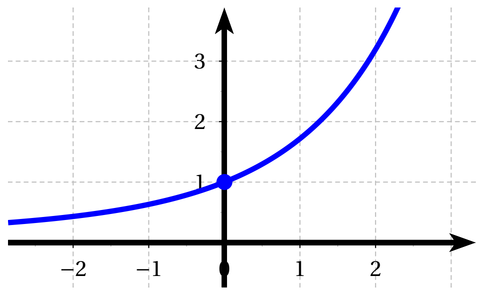
s'appelle prolongement par continuité de f en a. Cette fonction est continue en a.

Exemple 9

On sait que $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, donc la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0.

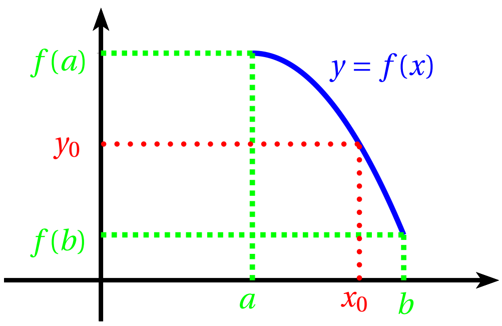


Exercices

Exercices 8 à 11

Théorème 2 (valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il admet au moins un antécédent x_0 dans $[a,b]$.



Exemple 10

Le polynôme $X^4 - 5X - 3$ a au moins une racine dans $\mathbb{R}$. En effet :

- la fonction $f : x \mapsto x^4 - 5x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- $f(1) = 1^4 - 5\times 1 - 3 = -7$, $f(2) = 2^4 - 5\times 2 - 3 = 3$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout nombre $y_0 \in [-7;3]$ a au moins un antécédent par f dans l'intervalle $[1;2]$. En particulier, 0 a un antécédent par f, donc le polynôme $X^4 - 5X - 3$ a au moins une racine dans $[1;2]$ – et donc dans $\mathbb{R}$.

Remarque.
Le théorème des valeurs intermédiaires se généralise de façon évidente à des intervalles ouverts ou semi-ouverts. Dans le cas d'un intervalle $[a,b[$ par exemple, il faut remplacer $f(b)$ par la limite de f en b (voir exercices).

Déf.6

On appelle segment de $\mathbb{R}$ un intervalle de la forme $[a,b]$.

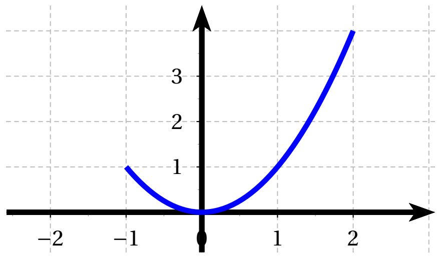
Proposition 8

1. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
2. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exemple 11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.
Alors :

- $f([-1;2]) = [0;4]$.
- $f(]-1;2]) = [0;4]$.
- $f([-1;2[) = [0;4[$.



Un corollaire immédiat du point 2 de la proposition qui précède est :

Proposition 9

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes (son maximum et son minimum).

Exercices

Exercices 12 à 16

Dans le cas où la fonction est monotone, on retrouve le résultat que nous avons déjà énoncé dans le chapitre 8 :

Théorème 3 (théorème de la bijection)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors f réalise une bijection de $[a,b]$ sur :

— $\big[f(a), f(b)\big]$ si f est strictement croissante;

— $\big[f(b), f(a)\big]$ si f est strictement décroissante.

Exemple 12

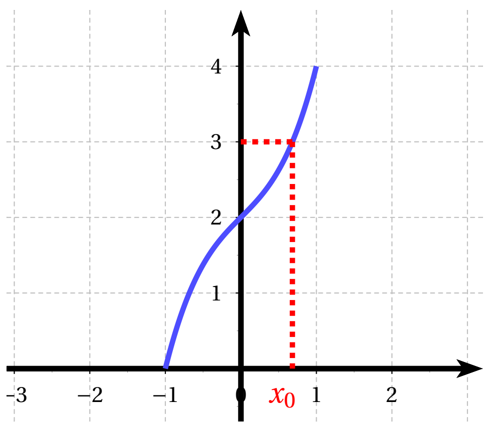
Soit $f : [-1;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x + 2$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$.

Pour tout $x \in [-1;1]$,

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

On a donc le tableau de variations :

x	-1		x_0		1
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	4



Comme f est continue et strictement croissante, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,4]$. L'équation $f(x) = 3$ a donc une unique solution x_0 dans $[-1,1]$.

Le théorème de la bijection donne l'existence de x_0, mais ne dit rien sur sa valeur. Il est d'ailleurs difficile de la déterminer : il faudrait résoudre l'équation $x^3 + x + 2 = 3$, ce que nous ne savons pas faire (méthode de Cardan). On peut néanmoins donner une valeur approchée de x_0 grâce à un algorithme de balayage, comme on l'explique ci-dessous.

Exemple 13 (algorithme de balayage)

On reprend l'exemple 12 et on cherche un encadrement de x_0 d'amplitude $0,01$.

Étape 1 : encadrement à l'unité. On complète un tableau de valeurs avec toutes les valeurs entières de x dans l'intervalle d'étude $[-1;1]$:

x	-1	0	1
$f(x)$	0	2	4

x	-1	0	x_0	1
$f(x)$	0	2	3	4

D'après le tableau de valeurs (ou le tableau de variations en-dessous), la fonction f prend la valeur 3 pour une valeur de x comprise entre 0 et 1 :

$$0 < x_0 < 1.$$

Étape 2 : encadrement au dixième. Sachant que x_0 est entre 0 et 1, on fait un tableau de valeurs sur l'intervalle $[0;1]$, avec un pas 10 fois plus petit – donc un pas de $0,1$. Pour aller plus vite, on programme le tableau avec la calculatrice.

x	0	$0,1$	$0,2$	...	$0,6$	$0,7$	...	1
$f(x)$	2	$2,101$	$2,208$	...	$2,816$	$3,043$	...	4

x	0	0.6	x_0	0.7	1
$f(x)$	2	2.816	3	3.043	4

La valeur 3 est prise pour un x compris entre $0,6$ et $0,7$:

$$0,6 < x_0 < 0,7.$$

Étape 3 : encadrement au centième. On fait un nouveau tableau de valeurs, cette fois sur l'intervalle $[0,6;0,7]$, et avec un pas 10 fois plus petit – donc un pas de $0,01$.

x	$0,60$	$0,61$	...	$0,68$	$0,69$	$0,70$
$f(x)$	$2,816$	$2,837$	...	$2,9944$	$3,0185$	$3,043$

x	0.6	0.68	x_0	0.69	0.7
$f(x)$	2.816	2.9944	3	3.0185	3.043

On obtient finalement l'encadrement d'amplitude $0,01$:

$$0,68 < x_0 < 0,69.$$

Remarque.
Lorsqu'on programme en machine (code Python), il est plus simple de couper l'intervalle en 2 plutôt qu'en 10 à chaque étape. On parle alors d'algorithme de dichotomie (voir exercices).

Exercices
Exercices 17 à 20

Théorème 4 (de la bijection, version générale)

— Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Son application réciproque est continue est de même sens de variation que f.

— Si par exemple $I = [a, b[$ et si f est strictement décroissante sur I, alors elle réalise une bijection de I sur $J = \left]f(b^-), f(a)\right]$, où $f(b^-)$ désigne la limite à gauche en b (limite qui appartient à $\overline{R}$).

III. Relations de comparaison

Dans cette section, on se donne un intervalle ouvert I dont l'une des extrémités est notée a (éventuellement $a = \pm\infty$) et deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a :

- dans le cas où a est fini, il existe $\eta > 0$ tel que g ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]a-\eta; a+\eta\right[\cap I$.
- dans le cas où $a = +\infty$, il existe M tel que g ne s'annule pas sur l'intervalle $]M, +\infty[\cap I$.[1]

Définition 7

On dit que :

- f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert J dont a est une extrémité et un réel $M > 0$ tels que
$$\forall x \in J, \left|f(x)\right| \leq M\left|g(x)\right|.$$
On note $f \underset{a}{=} O(g)$, $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
- f est négligeable devant g au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $f \underset{a}{=} o(g)$, $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.
- f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note $f \underset{a}{\sim} g$, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Cela revient à dire que $f(x) - g(x) \underset{a}{=} o(g(x))$.

Toutes les propriétés de comparaison énoncées dans le cas des suites (chapitre n°12) restent valables dans le cas des fonctions. Nous nous contenterons donc de donner deux exemples :

Exemple 14

$x + \ln x \underset{+\infty}{\sim} x$, car $\frac{x+\ln x}{x} = 1 + \frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$ par croissance comparée.

Exemple 15

On sait que $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, donc $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

On se rappellera également les deux autres équivalents « de référence » énoncés (ou presque) dans le chapitre n°3 :
$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$

1. On a une condition analogue dans le cas $a = -\infty$.

Exercices

Exercices 21 et 22

IV. Exercices

Exercice 1 ().
En utilisant la définition, prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Exercice 2 ().
Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. En utilisant la définition, prouver que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 ().
En utilisant la définition, prouver que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Exercice 4 ().
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$.

1. Soit $\epsilon > 0$. Démontrer que pour tout réel x :
$$|x-4| \leq 2\epsilon \implies |f(x)| \leq \epsilon.$$
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5 ().
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 2024.$$
On fixe $M > 0$.

1. Montrer qu'il existe $A_1 > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A_1 \implies g(x) \geq 1.$$
2. Montrer qu'il existe $A_3 > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A_3 \implies f(x)g(x) \geq M.$$
Conclusion ?

Exercice 6 ().
Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)$.
5. $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Exercice 7 ().
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} - \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

1. On pose $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim f(u_n)$.
2. On pose $v_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim f(v_n)$.
3. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 8 ().
Calculer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + xe^{-x}\right)$.
3. $\lim\limits_{x\to 0, x>0} x^x$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 ().
Peut-on prolonger par continuité en 0 la fonction
$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \ ?$$

Exercice 10 ().
Reprendre l'exercice précédent avec la fonction
$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{|x|}{x}.$$

Exercice 11 ( ).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

1. Soit a un réel. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a) = f\left(\frac{a}{2^n}\right)$.
2. Prouver que f est constante.

Exercice 12 ().
Déterminer, selon la valeur du réel a, le nombre de solutions de l'équation
$$(E_a) \ : \ x^3 - 3x^2 + 1 = a.$$

Exercice 13.
Prouver que tout polynôme de degré 5 a au moins une racine dans $\mathbb{R}$. Généraliser.

Exercice 14.
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On pose $g(x) = x - f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

1. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
2. Prouver que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 15.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\left(f(x)\right)^2 = 1$ pour tout réel x. Prouver que f est constante.

Exercice 16.
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Prouver que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 17.
Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0;2]$. Déterminer un encadrement de x_0 au centième.

Exercice 18.

1. Soit $g : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto (x-2)\mathrm{e}^x + 2$.
   - **a.** Étudier les variations de g et calculer sa limite en $+\infty$.
   - **b.** Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$, puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
2. Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}$.
   - **a.** Étudier les variations de f et calculer ses limites en 0^+ et en $+\infty$.
   - **b.** Prouver que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(2-\alpha)}$, puis déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ à l'aide de la question 1.b.

Exercice 19 (algorithme de dichotomie).
On reprend l'exercice 17 et on considère l'algorithme suivant écrit en Python.

```python
def f(x):
        return x**3-2*x**2+2*x-1

def dichotomie():
        a,b=0,2
        while b-a>0.1:
                y=f((a+b)/2)
                if y<1:
                        a=(a+b)/2
                else:
                        b=(a+b)/2
        return (a+b)/2
```

Déterminer l'affichage en sortie après avoir complété le tableau ci-dessous (ajouter autant de lignes que nécessaire).

a	b	$b-a$	boucle à continuer?	$\frac{a+b}{2}$	y
0	2	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Exercice 20.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation
$$\ln x = -nx$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ a une unique solution x_n.
2. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21.
Déterminer un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

1. $\mathrm{e}^x + x$ en $+\infty$.
2. $\cos(\sin x)$ en 0.
3. $\ln(\sin x)$ à droite en 0.
4. $\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$ en 0.
5. $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ en 0.
6. $\frac{\ln(1+2x)}{3x}$ en 0.
7. $(1+x)^{1/x}$ en 0.
8. $x\ln x - x\ln(x+2)$ en $+\infty$.

Exercice 22.
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Les équivalences ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g \iff \lim_a (f-g) = 0$.
2. $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g \iff f \underset{a}{\sim} g$.