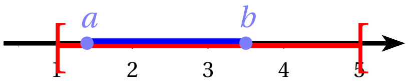
Chapitre 12 : Suites numériques

I. Parties de $\mathbb{R}$

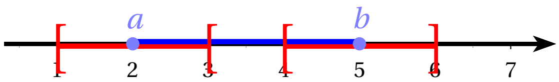
Déf. 1 Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si pour tous $(a,b) \in I^2$, avec $a < b$, le segment $[a,b]$ est inclus dans I.

Exemples 1

1. L'intervalle $I = [1;5[$ est convexe : si $1 \leq a < b < 5$, le segment $[a,b]$ est inclus dans I.



2. La réunion d'intervalles $E = [1;3[\cup [4;6]$ n'est pas convexe, puisque (par exemple) le segment $[2;5]$ n'est pas inclus dans E.



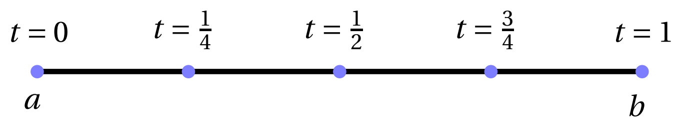
Proposition 1

Les sous-ensembles non vides convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Remarque.
Étant donnés $a < b$, le segment $[a,b]$ est l'ensemble des points qui peuvent s'exprimer sous la forme

$$(1-t)a + tb,$$

avec $0 \leq t \leq 1$.



C'est donc aussi l'ensemble des barycentres de la forme

$$\text{bary} A_{1-t} B_t,$$

avec $0 \leq t \leq 1$.

Définition 2

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que E est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les éléments de E :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ x \leq M.$$

Dans ce cas, on dit que M est un majorant de E.

- On dit que E est minorée s'il existe un réel m inférieur à tous les éléments de E :

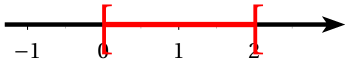
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ m \leq x.$$

Dans ce cas, on dit que m est un minorant de E.

- On dit que E est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples 2

1. Soit $E = [0;2[$.

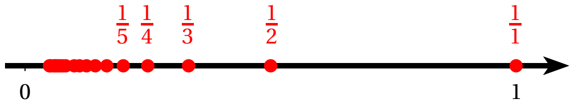


- $m = 0$ est un minorant de E (mais aussi $m = -2$, $m = -6$, etc.).
- $M = 2$ est un majorant de E (mais aussi $M = 3$, $M = 5$, etc.).

2. Soit $E = \mathbb{N} = \{0;1;2;3;\cdots\}$.

- $m = 0$ est un minorant de E.
- E n'est pas majorée.

3. Soit $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\cdots\right\}$.



- $m = 0$ est un minorant de E.
- $M = 1$ est un majorant de E.

Déf. 3

- ▶ Soit E une partie majorée de $\mathbb{R}$. On appelle borne supérieure de E le plus petit des majorants de E. On note $\sup(E)$ cette borne supérieure.
- ▶ Soit E une partie minorée de $\mathbb{R}$. On appelle borne inférieure de E le plus grand des minorants de E. On note $\inf(E)$ cette borne inférieure.

Les résultats des exemples ci-dessous, donnés sans justification, doivent permettre de consolider l'intuition. Certaines preuves seront données en exercices.

Exemples 3

1. Soit $E = [0;2[$.

- $\sup(E) = 2$.
- $\inf(E) = 0$.

2. Soit $E = \mathbb{N} = \{0;1;2;3;\cdots\}$.

- E n'a pas de borne supérieure.
- $\inf(E) = 0$.

3. Soit $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\cdots\right\}$.

- $\sup(E) = 1$.
- $\inf(E) = 0$.

Théorème 1

— Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

— Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exercices

Exercices 1 à 4

II. Généralités sur les suites

Définition 4

Une suite est une fonction $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.
Au lieu de $u(n)$, l'image d'un entier n est souvent notée u_n. Le nombre u_n s'appelle terme de rang n, ou terme d'indice n.
La suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On parle de « suite de terme général u_n ».

Remarque.
Il arrive fréquemment que l'on considère des suites définies à partir d'un certain entier naturel $n_0 \geq 0$, on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$. Ce qui suit est présenté dans le cadre des suites définies à partir du rang 0 mais peut aisément se prolonger aux suites définies à partir d'un rang n_0.

On rappelle quelques cas particuliers :

Définition 5

- **Suite arithmétique :**
  Soit $r \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de rayon r si
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$
  Dans ce cas
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r.$$
- **Suite géométrique :**
  Soit $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rayon q si
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n \times q.$$
  Dans ce cas
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n.$$
- **Suite arithmético-géométrique :**
  On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique si
  $$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$
- **Suite constante :**
  Soit $c \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à c si
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c.$$
- **Suite stationnaire :**
  On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si
  $$\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ u_n = c.$$

Exercices

Exercices 5 à 8

Définition 6

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée par le réel M si tous ses termes sont inférieurs à M :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M\,;$$
- minorée par le réel m si tous ses termes sont supérieurs à m :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m\,;$$
- bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 7

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante si
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$
  (ou de façon équivalente $u_{n+1} - u_n \geq 0$) ;
- décroissante si
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$$
  (ou de façon équivalente $u_{n+1} - u_n \leq 0$).

Lorsqu'une suite est croissante ou lorsqu'elle est décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Proposition 2

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_0.$$
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0.$$

Proposition 3

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Remarque.
Avec des définitions analogues, on parle également de suite croissante (ou décroissante) à partir d'un certain rang.

Exemple 4

On pose $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, car une exponentielle est positive.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-(n+1)} - \mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n} = \mathrm{e}^{-n} \times \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n} \times 1 = \mathrm{e}^{-n}\left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right)$.
Or $\mathrm{e}^{-n} > 0$ et $\mathrm{e}^{-1} - 1 < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Par conséquent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, elle est majorée par $u_0 = \mathrm{e}^{-0} = 1$. On a vu qu'elle était minorée, donc elle est bornée.

Exercices

Exercices 9 et 10

III. Suites convergentes

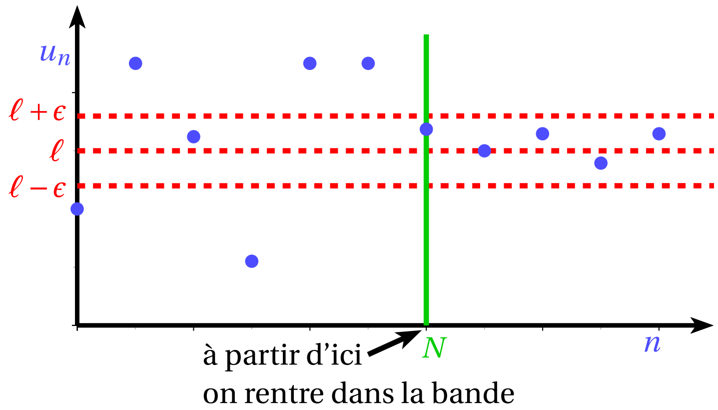
Définition 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite ℓ si tout intervalle de la forme $[\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon]$, avec $\epsilon > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. Plus formellement :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon).$$

Ou encore :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon).$$



Définition 9

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si elle a une limite finie ℓ, qu'elle diverge sinon.
- On note au choix $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Proposition 4

Si une suite converge, sa limite est unique.

Exemple 5

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}.$$

On prouve que $u_n \to 0$.

Soit $\epsilon > 0$. On a les implications :

$$\begin{aligned} n \geq \frac{1}{\epsilon} &\implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \qquad \text{(car deux nombres > 0 sont rangés en sens contraire de leurs inverses)} \\ &\implies u_n \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Comme il est clair par ailleurs que $u_n \geq -\epsilon$, on obtient :

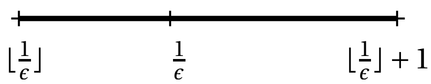
$$n \geq \frac{1}{\epsilon} \implies -\epsilon \leq u_n \leq \epsilon.$$

Cela prouve que $u_n \to 0$.

Remarque.

On peut prendre l'entier naturel $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ dans la définition 8, puisque

$$n \geq \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1 \implies n \geq \frac{1}{\epsilon}.$$



Attention

Attention à l'ordre des quantificateurs dans la définition 8, il n'est pas arbitraire ! Si l'on demandait que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \epsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon),$$

on voudrait qu'à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite soient arbitrairement proches de ℓ. Ce ne serait possible que pour une suite stationnaire.

Exercices

Exercices 11 à 13

Proposition 5 (limites de référence)

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à c, alors $\lim u_n = c$.
2. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim f(n) = \ell$.
3. Si $|q| < 1$, alors $\lim q^n = 0$.

Exemples 6

1. $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (par croissance comparée), donc $\lim ne^{-n} = 0$.
2. $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, donc $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Proposition 6

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons ℓ sa limite.
Par définition de la limite, avec $\epsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq 1).$$

Donc pour $n \geq N$ et d'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

Et finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|)$.

Attention

La réciproque est fausse ! Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1; -1; 1; -1; \cdots)$ est bornée, mais ne converge pas (voir exple 10).

Les propriétés suivantes recensent les règles de calcul avec les limites.

Proposition 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. $u_n \to \ell \iff (u_n - \ell) \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.
2. $u_n \to \ell \implies |u_n| \to |\ell|$.

Proposition 8

Si $u_n \to 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $u_n \times v_n \to 0$.

Proposition 9

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. Si $u_n \to \ell$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n \to \lambda \ell$.
2. Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors

$$(u_n + v_n) \to \ell + \ell',$$
$$(u_n \times v_n) \to \ell \times \ell'.$$

3. Si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, avec $\ell' \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration (point 2 de la proposition 9, pour le produit uniquement)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par un calcul préparatoire :

$$u_n \times v_n - \ell \times \ell' = (u_n - \ell) \times v_n + \ell \times \left(v_n - \ell'\right).$$

On examine chacun des deux termes dans le membre de droite ci-dessus :

- On sait que $u_n \to \ell$ donc $(u_n - \ell) \to 0$ (proposition 7). De plus $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc elle est bornée (proposition 6). On en déduit que $(u_n - \ell) \times v_n \to 0$ (proposition 8).
- On sait que $v_n \to \ell'$ donc $\left(v_n - \ell'\right) \to 0$ (proposition 7). Et donc, d'après le point 1, $\ell \times \left(v_n - \ell'\right) \to 0$.

On a prouvé que $(u_n - \ell) \times v_n \to 0$ et que $\ell \times \left(v_n - \ell'\right) \to 0$. En utilisant le point 2 (pour la somme), on en déduit que $u_n \times v_n - \ell \times \ell' = (u_n - \ell) \times v_n + \ell \times \left(v_n - \ell'\right)$ a pour limite 0. La proposition 7 permet alors de conclure.

Exemple 7

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1.$$

En utilisant une suite géométrique annexe, on a démontré la formule (voir exercice 7) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{7}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}.$$

$\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, et donc

$$u_n \to \frac{7}{3} \times 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Exercices

Exercices 14 à 17

Proposition 10 (passage à la limite dans une inégalité)

1. Si $u_n \to \ell$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M, alors $\ell \le M$.
2. Si $u_n \to \ell$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m, alors $\ell \ge m$.

Théorème 2 (des gendarmes.)

Si $u_n \to \ell$, $w_n \to \ell$ et si $u_n \le v_n \le w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $v_n \to \ell$.

Démonstration

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse $\lim u_n = \ell$ donc pour n assez grand, disons $n \ge N_1$, $\ell - \epsilon \le u_n \le \ell + \epsilon$.
De même $\lim w_n = \ell$ donc pour n assez grand, disons $n \ge N_2$, $\ell - \epsilon \le w_n \le \ell + \epsilon$.
Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n \le w_n$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $n \ge N$:

$$\ell - \epsilon \le u_n \le v_n \le w_n \le \ell + \epsilon.$$

On a donc $\ell - \epsilon \le v_n \le \ell + \epsilon$, et par suite $\lim v_n = \ell$.

Exemple 8

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$.
On a l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{-1}{n^2+1} \le u_n \le \frac{1}{n^2+1}$. Or $\lim \frac{-1}{n^2+1} = \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim u_n = 0$.

Remarque. On ne peut pas « passer à la limite » dans les inégalités strictes. Par exemple, il est vrai dans l'exemple précédent que $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{-2}{n^2+1} < u_n < \frac{2}{n^2+1}$; en revanche il faut des inégalités larges quand on prend les limites : $0 \le 0 \le 0$.

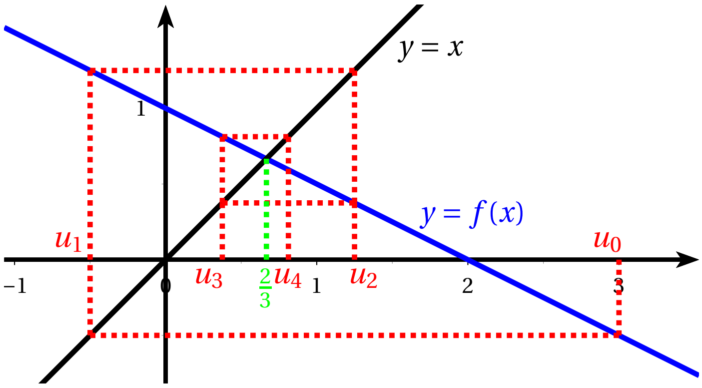
Exemple 9

On reprend l'exemple 7 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

avec $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

On propose une nouvelle méthode pour étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.



On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n. \tag{1}$$

- La propriété 1 est vraie pour $n = 0$, puisque $\left|u_0 - \frac{2}{3}\right| = \left|3 - \frac{2}{3}\right| = \frac{7}{3}$ et $\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{7}{3}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left|u_k - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$. On a alors

  $$\left|u_{k+1} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{2}u_k + 1 - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{2}u_k + \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{2}\left(u_k - \frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|u_k - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{2} \times \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1},$$

  et ainsi la propriété est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité 1 se réécrit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n - \frac{2}{3} \leq \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Or $\lim \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\left(-\frac{7}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$, puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = 0$; et finalement $\lim u_n = \frac{2}{3}$.

Remarque.
La limite $\ell = \frac{2}{3}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple précédent est un point fixe de la fonction f, c'est-à-dire que ℓ est solution de l'équation $-\frac{1}{2}x + 1 = x$.

Exercices

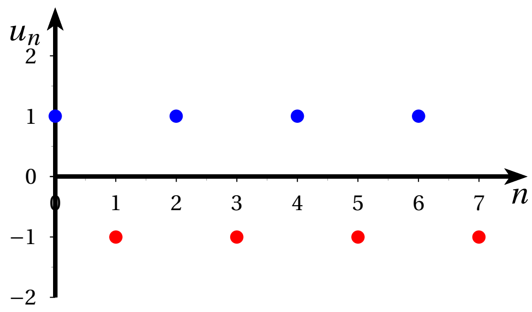
Exercices 18 à 20

Déf. 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite, ou sous-suite, est une suite de la forme $\left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Exemple 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

- Si on prend $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$, alors la suite extraite est la suite des termes de rang pair $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, u_6, \dots)$, dont le terme général est $(-1)^{2n} = 1$. Autrement dit, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1.
- Si on prend $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n+1$, alors la suite extraite est la suite des termes de rang impair $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, u_7, \dots)$, dont le terme général est $(-1)^{2n+1} = -1$. Autrement dit, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1.



Exemple 11

En examinant le graphique de l'exemple 9, on devine que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone, mais que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ le sont (la première est décroissante, la deuxième est croissante). Une technique pour étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à étudier la convergence de chacune de ces deux sous-suites.

Proposition 11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $\left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

Remarques.

- En appliquant la proposition précédente à $\phi : n \mapsto n+1$, on voit que si $u_n \to \ell$, alors $u_{n+1} \to \ell$. Ce résultat est crucial pour l'étude des suites définies par une relation de récurrence (voir exercices).
- On utilisera la réciproque de la propriété 11 pour prouver la divergence d'une suite. Par exemple, la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puisque la sous-suite des termes de rang pair est constante égale à 1 (et donc a pour limite 1), et la sous-suite des termes de rang impair est constante égale à -1 (et donc a pour limite -1).

Proposition 12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ si, et seulement si, chacune des deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercices

Exercices 21 à 23

IV. Suites de limite infinie

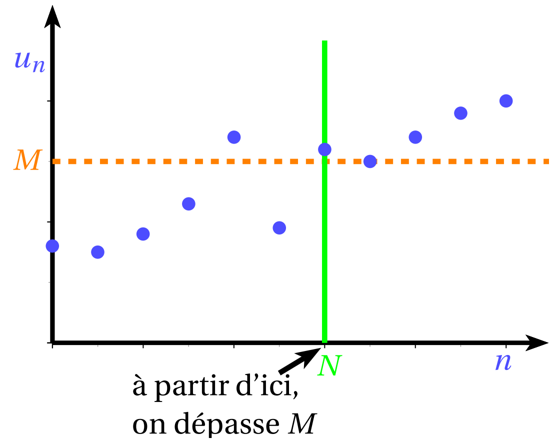
Définition 11

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si u_n dépasse n'importe quel réel $M>0$ à partir d'un certain rang N. Plus formellement :

$$\forall M>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geq N \implies u_n\geq M).$$

On note $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$.

Remarque.
On définit de façon analogue $u_n \to -\infty$.



Proposition 13

Si $q>1$, alors $\lim q^n = +\infty$.

Démonstration

Soit $q>1$. On souhaite prouver que la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\forall M>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left(n\geq N \implies q^n\geq M\right).$$

Prenons donc $M>0$. La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc :

$$q^n\geq M \iff \ln\left(q^n\right)\geq \ln M \iff n\ln q\geq \ln M.$$

Or $q>1$ donc $\ln q>0$ et la dernière inégalité ci-dessus est équivalente à $n\geq \frac{\ln M}{\ln q}$.
Conclusion : on pose $N=\lfloor\frac{\ln M}{\ln q}\rfloor+1$. Alors $(n\geq N) \implies n\geq\frac{\ln M}{\ln q} \implies \left(q^n\geq M\right)$. Cela prouve que $q^n\to+\infty$.

Proposition 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si $u_n\to+\infty$, alors $\frac{1}{u_n}\to 0$.
2. Si $u_n\to 0$ et $u_n>0$ pour n assez grand, alors $\frac{1}{u_n}\to+\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors $\lim f(n)=+\infty$.

Exemple 12

On pose $u_n = n-\sin n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$\sin n\leq 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc

$$u_n\geq n-1.$$

Or $\lim(n-1)=+\infty$, donc $\lim\,(n-\sin n)=+\infty$.

Proposition 15 (limite par comparaison)

Si $u_n\to+\infty$ et si $u_n\leq v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $v_n\to+\infty$.

Exercices

Exercices 24 et 25

V. Limites des suites monotones

Théorème 3

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par M, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite vérifie $\lim u_n \leq M$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante non majorée, alors $\lim u_n = +\infty$.

On dispose de résultats analogues pour les suites décroissantes.

Démonstration

Premier point. L'ensemble $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{u_0\ ;\ u_1\ ;\ u_2\ ;\ \dots\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ majoré par M, donc il admet une borne supérieure $\ell \leq M$.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, ℓ est le plus petit majorant de E, donc $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de E. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\ell - \epsilon \leq u_N$.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $\ell = \sup(E)$, pour tout entier $n \geq N$:

$$\ell - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell.$$

On a ainsi prouvé :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \epsilon),$$

c'est-à-dire que $u_n \to \ell$.

Deuxième point. Soit $M > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, donc $\exists N,\ u_N \geq M$. Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies u_n \geq M).$$

Cela prouve que $u_n \to +\infty$.

Remarques.

- On a prouvé plus que ce qui était annoncé dans le premier point : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, alors sa limite est la borne supérieure de $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- La limite de la suite n'est pas nécessairement égale au majorant M – ce serait d'ailleurs absurde, il y a une infinité de majorants.

Exemple 13

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times 2^k} = \frac{1}{1 \times 2^1} + \frac{1}{2 \times 2^2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \cdots + \frac{1}{n \times 2^n}.$$

Cette suite est bien sûr croissante, car on ajoute des termes positifs. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leq \underbrace{\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{S_n}.$$

Exemple 13 – Suite

On a déjà rencontré la somme S_n en exercice; on a vu que $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.
On a donc
$$u_n \leq S_n \leq 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1.$$
Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge. On peut prouver que sa limite est égale à $\ln 2$.

Attention

Ne dites surtout pas que le majorant est $1 - \frac{1}{2^n}$: ce majorant doit être indépendant de n.

Exercices

Exercices 26 à 31

Définition 12

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
- $v_n - u_n \to 0$.

Théorème 4 (Des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration

On prend les notations de la définition 12.

Montrons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, en raisonnant par l'absurde : si ce n'était pas le cas, il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$. Donc $u_N - v_N = \alpha > 0$.

Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante; et donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \implies u_n - v_n \geq u_N - v_N = \alpha).$$
Faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, d'après la proposition 10 on aurait
$$0 = \lim (u_n - v_n) \geq \alpha,$$
ce qui est absurde puisque $\alpha > 0$.

Nous savons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq v_0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante majorée par v_0, elle converge vers une limite finie ℓ.

On montre de la même façon que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ'. On a alors $0 = \lim (v_n - u_n) = \ell' - \ell$, d'où $\ell = \ell'$.

Exemple 14

Dans l'exemple 9, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \cdots)$ est décroissante, la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \cdots)$ est croissante (ces deux affirmations mériteraient d'être démontrées rigoureusement). Elle sont adjacentes et convergent vers la même limite $\ell = \frac{2}{3}$.

Exercices

Exercices 32 et 33

VI. Comparaison de suites

Dans cette section, lorsqu'on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$, cela sous-entend que les termes de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nuls à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ v_n \neq 0.$$

Définition 13

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$ (lire « u_n est un grand O de v_n »).
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\frac{u_n}{v_n} \to 0$. On note alors $u_n = o(v_n)$ (lire « u_n est un petit o de v_n »).
- On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\frac{u_n}{v_n} \to 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemples 15

1. $\ln n = o(n)$, car $\frac{\ln n}{n} \to 0$ par croissance comparée.
2. $n \sin n = O(n)$. En effet, si $n \geq 1$, $\frac{\cancel{n}\sin n}{\cancel{n}} = \sin n$, et la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3. $n+1 \sim n$, car $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$.

Exercices

Exercices 34 à 36

Proposition 16 (relation d'équivalence)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. **Réflexivité.** $u_n \sim u_n$.
2. **Symétrie.** Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
3. **Transitivité.** Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Proposition 17 (croissances comparées)

Si $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont trois réels strictement positifs, alors :

$$(\ln n)^\beta = o\left(n^\alpha\right) \qquad n^\alpha = o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right).$$

Proposition 18

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites.

1. Si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Ce sont les deux propositions suivantes qui seront les plus utiles en pratique :

Proposition 19

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

1. $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \to 0$.
2. $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \to \ell$, alors $v_n \to \ell$.

Proposition 20

Si $u_n \sim a_n$, $v_n \sim b_n$, et $k \in \mathbb{N}$, alors :

- $u_n^k \sim a_n^k$.
- $u_n \times v_n \sim a_n \times b_n$.
- $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$.

Attention

La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple :

$$n^2 - 2n \sim n^2 - n \qquad \text{et} \qquad -n^2 \sim -n^2\,;$$

mais en ajoutant membre à membre :

$$-2n \not\sim -n.$$

Exercices

Exercice 37

VII. Exercices

Exercice 1.
Donner sans justification les bornes supérieures et inférieures de chacun des ensembles suivants :

- $A =]3;7]$.
- $B = [0;1] \cup [2;3]$.
- $C = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- $D = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 2.
Justifier la réponse pour la borne supérieure de l'ensemble C dans l'exercice précédent.

Exercice 3.
Si x est un réel, la partie entière de x est le plus grand entier n qui est inférieur ou égal à x. On note $\lfloor x \rfloor$ cette partie entière.

1. Donner les valeurs de $\lfloor \frac{3}{4} \rfloor$, $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor 2 \rfloor$ et $\lfloor -1,5 \rfloor$.
2. Construire la courbe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
3. Donner sans justification un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ qui n'utilise pas la partie entière.
4. En déduire que pour tous réels a, b :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor.$$

Exercice 4 (🏅).
Soit $E = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$ dans chacun des cas suivants :
   - $\epsilon = 0,25$;
   - $\epsilon = 0,13$;
   - $\epsilon = 0,0024$
2. Prouver que $\inf(E) = 0$.

Exercice 5.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Tracer dans un même repère les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,5x + 3$ sur l'intervalle $[0;10]$ (on prendra 1 cm ou 1 carreau comme unité graphique).
3. Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^2 + 2x$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0,5$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;1]$.
2. Tracer dans un même repère les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$ sur l'intervalle $[0;1]$ (on prendra 10 cm ou 10 carreaux comme unité graphique). Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.

Exercice 7 ().
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$.

1. **a.** Construire dans un même repère, sur l'intervalle $[-1;4]$, la droite d'équation $y = x$ et la droite représentant la fonction f.
   b. Construire u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. On pose $v_n = u_n - \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

Exercice 8 ().
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et la formule de « récurrence double » :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 \times 3^n - 2^n.$$

Exercice 9 ().
Dans chaque cas, dire si la suite est majorée, minorée, croissante, décroissante.

1. $u_n = 0,5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 ().
On reprend la suite de l'exercice 5.

1. Démontrer par récurrence que

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ? Décroissante ? Majorée ? Minorée ? Bornée ?

Exercice 11 ().
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite constante égale à c. Prouver que $\lim u_n = c$.

Exercice 12 ().
Soit $0 < q < 1$. Prouver que $\lim q^n = 0$.

Exercice 13 ().
Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Prouver que $\lim(u_n \times v_n) = 0$.

Exercice 14.
Calculer les limites des suites de termes généraux :

1. $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.
2. $v_n = \frac{\ln n}{n}$.
3. $w_n = \dfrac{3n-5}{4n+1}$.
4. $x_n = \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2^n}}$.
5. $y_n = \dfrac{3^n - 1}{3^n + 2^n}$.

Exercice 15 ().
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 6$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 0,6u_n - 4$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On admet qu'elle converge. Calculer sa limite.

Exercice 16 ().
Pour tout $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

1. Soit $n \geq 2$. En remarquant que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $2 \leq k \leq n$, prouver que $S_n = 1 - \frac{1}{n}$.
2. En déduire $\lim S_n$.

Exercice 17 (🏛).
Soit q un réel tel que $|q|<1$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} q^k$.

1. Rappeler la formule pour S_n vue dans le chapitre 7.
2. En déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer également $\lim S'_n$, où $S'_n=\sum_{k=1}^{n} q^k$.

Exercice 18 (🏛).
Calculer $\lim \frac{\sin n}{n}$ et $\lim \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 19 (🏛).

1. Prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\ln(n!)\leq n\ln n.$$
2. Calculer $\lim \frac{\ln(n!)}{n^2}$.

Exercice 20 (🏛 🏅).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0=\frac{3}{2}$ et la relation de récurrence
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=1+\frac{2}{u_n}.$$

1. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\frac{3}{2}\leq u_n\leq 4.$$
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$|u_n-2|\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
3. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 21 (informel).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On sait que toute sous-suite est de la forme $\left(u_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante.

Déterminer ϕ pour chacune des sous-suites ci-dessous :

1. $(u_1,u_3,u_5,u_7,u_9,\dots)$.
2. $(u_0,u_3,u_6,u_9,u_{12},\dots)$.
3. $(u_0,u_1,u_4,u_{16},u_{25},\dots)$.

Exercice 22.
On pose $u_n=\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 23 (🏅).
On pose $u_n=\cos n$ et $v_n=\sin n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

1. En utilisant la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, prouver que
$$\ell=2\ell^2-1.$$
Quelles sont les valeurs possibles de ℓ d'après cette égalité ?
2. On a vu dans la leçon sur les nombres complexes que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$
En déduire que $\ell=1$, puis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. En utilisant la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, aboutir à une contradiction. Conclusion ?

Exercice 24 (🏅).
En utilisant la définition, prouver que
$$\lim \frac{n-3}{4}=+\infty.$$

Exercice 25 (🏅).
Démontrer la proposition de limite par comparaison (proposition 15).

Exercice 26 (🏛).
On reprend la suite des exercices 5 et 10. Démontrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 27 (🏛 🏅).
On reprend la suite de l'exercice 6. On rappelle qu'elle est définie par $u_0=0{,}5$ et la relation de récurrence
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n),$$
où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto -x^2+2x$.

1. Rappeler les variations de f sur $[0;1]$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1.$$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 28 (🏛 🏅).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 4$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

où $f : x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1;4]$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 29 (🏛 🏅).

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $T_n \leq 1 + S_n$, où $(S_n)_{n\geq 2}$ est la suite définie dans l'exercice 16.
2. En déduire que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 30 (🏛).

On définit une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{w_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On admet que cette suite est à termes positifs.

1. Étudier les variations de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En raisonnant par l'absurde, prouver que $\lim w_n = +\infty$.

Exercice 31 (🏅).

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
2. En déduire la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 32 (🏛).

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Prouver que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Exercice 33 (🏅).

On pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Écrire en extension les termes u_0 à u_5.
2. Prouver que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   On admet que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (la preuve est similaire).
3. Prouver que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 34 (🏛).

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $n = o(e^n)$.
2. $n = O(e^n)$.
3. $n = o(n^2)$.
4. $n^2 \sim n^2 + n$.
5. $e^n \sim e^{2n}$.
6. $\ln(2n) = O(\ln n)$.

Exercice 35 (🏛).

1. Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n = o(1)$?
2. Que peut-on dire d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n = O(1)$?

Exercice 36 (🏛).

Les trois questions sont indépendantes.

1. On suppose que $u_n \sim v_n$ et que $v_n \sim w_n$. Prouver que $u_n \sim w_n$.
2. On suppose que $u_n \to \ell$ et que $v_n \sim u_n$. Prouver que $v_n \to \ell$.
3. Démontrer l'équivalence :
$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n).$$

Exercice 37 (🏛).

Démontrer les propositions :

1. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$.
2. $\frac{(n+1)\ln n}{n\ln(2n)} \to 1$.
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ n^2 \leq e^{0.1n}$.
4. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ n^{0.03} \geq 100(\ln n)^2$.