Chapitre 11 : Matrices et syst. linéaires

Dans toute la leçon :

- sauf indication contraire, n, p, q désignent trois entiers naturels non nuls;
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

I. Calcul matriciel

Définition 1

Une matrice à n lignes et p colonnes (ou matrice de taille $n \times p$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau rectangulaire

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

où les a_{ij} sont des éléments de $\mathbb{K}$
On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques.

- La matrice $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est la i-ième ligne de A, la matrice $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ sa j-ième colonne.
- Par convention, on note a_{ij}, ou bien A_{ij} le coefficient à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de A.

Exemple 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes à coefficients réels : $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
On a par exemple :

$$a_{11} = 2, \qquad a_{23} = 6.$$

Définition 2

- Une matrice qui n'a qu'une seule ligne s'appelle matrice ligne.
- Une matrice qui n'a qu'une seule colonne s'appelle matrice colonne.
- Lorsque $n = p$ (autant de lignes que de colonnes), on dit que la matrice est carrée. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ (pour alléger, on dit simplement « de taille n »).
- La matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée matrice nulle et notée 0_n.

Exemples 2

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne; la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ une matrice colonne. Il y a bien sûr un lien avec les coordonnées des points et des vecteurs.
2. $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.
3. La matrice nulle de taille 2 est $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 3

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- La matrice $S = A + B$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par
$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
- La matrice $C = \lambda A$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont définis par
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Proposition 1

Pour toutes matrices A, B, C de même taille, pour tous scalaires λ, λ' :

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
4. $(\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A$.

Exemple 3

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. On a alors :
$$M + N = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \quad , \quad 2M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Exercices

Exercices 1 à 3

Définition 4

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B, noté $A \times B$, est la matrice $P \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le terme général est
$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Attention

On ne peut calculer $A \times B$ que quand le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 4

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Pour calculer le produit $A \times B$, il est agréable de présenter le calcul sous forme de croix :

			2	5
			-1	0
			3	6
2	0	1	$2 \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times 3$	$2 \times 5 + 0 \times 0 + 1 \times 6$
-4	3	5	$-4 \times 2 + 3 \times (-1) + 5 \times 3$	$-4 \times 5 + 3 \times 0 + 5 \times 6$

On obtient $A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exercices 4 à 8

Déf. 5 On dit que deux matrices carrées A et B de même taille commutent si $A \times B = B \times A$.

Attention

En général, on n'a pas $A \times B = B \times A$.

Déf. 6 La matrice identité de taille n, notée I_n, est la matrice qui comporte des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Exemple 5

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2

Étant donnés trois matrices A, B, C et deux réels λ, λ', on a les formules suivantes (sous réserve de compatibilité des formats) :

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
2. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
3. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda (A \times B)$.
5. $I_n \times A = A \times I_n = A$.

Remarque.
La matrice nulle joue le rôle de 0 dans les calculs, la matrice identité joue le rôle de 1.

Définition 7 Si A est une matrice carrée de taille n et p un entier naturel non nul, on pose

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}.$$

On pose également $A^0 = I_n$.

Remarque.
Si on veut être plus rigoureux et éviter les pointillés dans la définition ci-dessus, il faut définir par récurrence : $A_0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A = A \times A^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Définition 8 On dit qu'une matrice A est :

- diagonale si tous les termes en dehors de la diagonale sont nuls ;
- triangulaire supérieure si tous les termes situés strictement en-dessous de la diagonale sont nuls ;
- triangulaire inférieure si tous les termes situés strictement au-dessus de la diagonale sont nuls.

Exemple 6

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Proposition 3

Si A est la matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors pour tout entier naturel p, $A^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Proposition 4 (binôme de Newton)

Si les matrices A et B commutent, alors pour tout entier naturel p :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \times B^{p-k}.$$

Exercices

Exercices 9 à 14

II. Systèmes linéaires

Définition 9

On appelle système linéaire à n équations et p inconnues $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p$ un système de la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = y_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = y_n \end{cases}$$

Les a_{ij} sont les coefficients du système, les y_i sont les seconds membres.

Définition 10

- Une solution de (S) est un p-uplet $\left(x_1, x_2, \cdots, x_p\right)$ vérifiant les n équations à la fois.
- On dit que le système est compatible s'il admet au moins une solution. Dans le cas contraire, il est dit incompatible.
- On dit que le système est homogène si tous les y_i valent 0. Le système homogène associé à (S) est le système

$$(H) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = 0 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = 0 \end{cases}$$

Remarque.
Le système (H) est compatible car le p-uplet $(0, 0, \cdots, 0)$ est solution.

Lorsque le système est « échelonné en lignes », la résolution est facile :

Exemple 7

On considère le système

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - 2z = 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$$

Il vient immédiatement :

$$z = \frac{6}{3} = 2,$$
$$y = 1 + 2z = 1 + 2 \times 2 = 5,$$
$$x = 2y - 3z = 2 \times 5 - 3 \times 2 = 4,$$

donc l'unique solution est $(x, y, z) = (4, 5, 2)$.

Pour résoudre un système d'équations plus général, on le ramène à un système échelonné en lignes par des opérations élémentaires [1]. C'est la méthode du « pivot de Gauss » :

Exemple 8 (pivot de Gauss)

On résout le système

$$\begin{cases} 2x+3y-\ \ z=3 & L_1 \\ -x+2y+2z=1 & L_2 \\ \ \ x+\ \ y-\ \ z=0 & L_3 \end{cases}$$

On échange les lignes L_1 et L_2 :

$$\begin{cases} \boxed{-1}\,x & +2y & +2z & =1 & L_1 \leftarrow L_2 \\ 2x & +3y & -\ z & =3 & L_2 \leftarrow L_1 \\ x & +\ y & -\ z & =0 & L_3 \leftarrow L_3 \end{cases}$$

On « pivote » autour du $\boxed{-1}$ en haut à gauche, c'est-à-dire que l'on élimine les x des lignes L_2 et L_3 grâce à ce $\boxed{-1}$:

$$\begin{cases} \boxed{-1}\,x & +2y & +2z & =1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & 7y & +3z & =5 & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ & 3y & +\ z & =1 & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{cases}$$

On multiplie les lignes L_2 et L_3 par des coefficients non nuls :

$$\begin{cases} \boxed{-1}\,x & +\ 2y & +2z & =\ 1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & \boxed{21}\,y & +9z & =15 & L_2 \leftarrow 3L_2 \\ & 21y & +7z & =\ 7 & L_3 \leftarrow 7L_3 \end{cases}$$

À présent, on « pivote » autour du $\boxed{21}$ de la ligne L_2, c'est-à-dire que l'on élimine le y de la ligne L_3 grâce à ce $\boxed{21}$:

$$\begin{cases} \boxed{-1}\,x & +\ 2y & +2z & =\ 1 & L_1 \leftarrow L_1 \\ & \boxed{21}\,y & +9z & =\ 15 & L_2 \leftarrow L_2 \\ & & \boxed{-2}\,z & =-8 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

On en déduit que l'unique solution est donnée par

$$\begin{aligned} z &= \frac{-8}{-2} = 4 \\ y &= \frac{15-9z}{21} = \frac{15-9\times 4}{21} = -1 \\ x &= \frac{1-2y-2z}{-1} = \frac{1-2\times(-1)-2\times 4}{-1} = 5. \end{aligned}$$

Autrement dit $S=\{(5,-1,4)\}$.

Remarques.

- Les trois coefficients en couleur ($\boxed{-1}$, $\boxed{21}$ et $\boxed{-2}$) sont les pivots.
- On pivote toujours « en haut à gauche » – quitte à intervertir la place de deux des inconnues.
- Interprétation géométrique de la solution : les plans d'équations $2x+3y-z=3$, $-x+2y+2z=1$ et $x+y-z=0$ se coupent au point de coordonnées $(5;-1;4)$.

Définition 11

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont :

- Échange des lignes i et j : $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplication de la ligne i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajout à la ligne i de la ligne $j \neq i$ multipliée par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Chacune de ces opérations élémentaires admet une opération réciproque, qui elle-même est élé-

1. Voir plus bas pour la définition de l'expression « opération élémentaire ».

mentaire. On en déduit :

Proposition 5

Deux systèmes linéaires pour lesquels on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes ont le même ensemble de solutions.

Exercices

Exercices 15 et 16

Exemple 9

On résout le système

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ x-2z=1 & L_2 \\ 2x+y-z=3 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -y-3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2-L_1 \\ -y-3z=1 & L_3 \longleftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -y-3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 0=1 & L_3 \longleftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Il est impossible que $0=1$, donc le système est incompatible : $S=\emptyset$.

Exemple 10

Reprenons le système de l'exemple précédent en le modifiant très légèrement :

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ x-2z=1 & L_2 \\ 2x+y-z=2 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -y-3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2-L_1 \\ -y-3z=0 & L_3 \longleftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -y-3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2 \\ 0=0 & L_3 \longleftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

La dernière égalité est toujours vérifiée, donc le système se réécrit

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \longleftarrow L_1 \\ -y-3z=0 & L_2 \longleftarrow L_2 \end{cases}$$

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions : une fois choisie une valeur de z, on a

$$y=-3z,$$

puis

$$x=1-y-z=1-(-3z)-z=1+2z.$$

Autrement dit, les solutions sont les triplets de la forme $(1+2z,-3z,z)$, avec $z\in\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\begin{aligned} S &= \{(1+2z,-3z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(1,0,0)+z(2,-3,1)\,|\,z\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Remarque.

Interprétation géométrique : les plans d'équations $x+y+z=1$, $x-2z=1$ et $2x+y-z=2$ se coupent suivant la droite passant par $A(1;0;0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Exercices

Exercices 17 et 18

III. Matrices et systèmes linéaires

Proposition 6

Le système

$$(S):\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= y_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= y_n \end{cases}$$

se réécrit sous forme matricielle $AX = Y$, où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

On dit que A est la matrice associée au système (S).

Exemple 11

Le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x \quad - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$ se réécrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercices

Exercice 19

Déf. 12

On appelle matrice augmentée du système (S) la matrice $(A|Y)$.

Exemple 12

On reprend l'exemple 11. La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Définition 13

- Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle.
- Une matrice est dite échelonnée réduite en lignes si elle est échelonnée, si tous les pivots sont égaux à 1 et si ce sont les seuls termes non nuls de leurs colonnes.

Exemple 13

La matrice ci-dessous est échelonnée en lignes. Il y a trois pivots (4, 1 et 7), écrits en rouge.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ci-dessous est échelonnée réduite en lignes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre un système, on peut également travailler par opération sur les lignes de la matrice associée, jusqu'à avoir une matrice échelonnée réduite en lignes. C'est une méthode équivalente à celle du pivot de Gauss.

Exemple 14

On reprend l'exemple 8. La matrice augmentée associée au système $\begin{cases} 2x+3y-\ \ z=3 \\ -x+2y+2z=1 \\ \ \ x+\ \ y-\ \ z=0 \end{cases}$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$.

On va effectuer des opérations sur les lignes jusqu'à avoir une matrice échelonnée réduite en lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} 1x+0y+0z=5 \\ 0x+1y+0z=-1 \\ 0x+0y+1z=4 \end{cases},$$

c'est-à-dire que l'unique solution du système est $(x,y,z)=(5,-1,4)$.

Remarques.

- Dans la colonne de gauche ci-dessus, la méthode est la même que pour le pivot : on fait apparaître des 0 en bas à gauche de la matrice. Une fois la matrice échelonnée, on « remonte » : on fait apparaître des 0 en haut à droite.
- Lorsque le système a une unique solution, on se ramène à la matrice identité.

Déf. 14 Deux matrices A et A' sont dites équivalentes si on passe de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Exercices
Exercice 20

Définition 15 On appelle rang d'un système linéaire le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite en lignes équivalente à la matrice associée au système.

Exemple 15

On reprend l'exemple précédent. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est équivalente à la matrice identité I_3.

Exemple 16

On reprend l'exemple 14. On sait que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc le rang de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est égal à 3.

Proposition 7

Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée réduite en lignes.

Exemple 17

On détermine le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

On opère sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & -5 & 20 \\ 0 & -10 & -10 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 5L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & -10 & -10 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -0.2 & 1.6 \\ 0 & 1 & 1 & -0.4 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{10}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{matrix}$$

La matrice est réduite échelonnée en lignes et elle a deux pivots, donc le rang de B est égal à 2.

Proposition 8

On considère un système linéaire dont la matrice associée est échelonnée réduite en lignes, on note r son rang et p son nombre de colonnes.

1. Si le système comporte une ligne dont le membre de gauche est nul et pas celui de droite, il est incompatible ($S = \emptyset$).
2. Dans le cas contraire, le système est compatible et il admet :
   - une seule solution si $r = p$.
   - une infinité de solutions si $r < p$, l'ensemble des solutions étant alors paramétré par $p - r$ inconnues secondaires situées sur les colonnes sans pivot, les inconnues situées sur les colonnes avec pivot étant appelées inconnues principales.

Exemples 18

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ de l'exemple 16 est associée au système $\begin{cases} 2x+3y-\ \ z=3 \\ -x+2y+2z=1 \\ \ \ x+\ \ y-\ \ z=0 \end{cases}$.

   On a vu que $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc que le rang de A est $r = 3$. Ce rang est égal au nombre de colonnes ($p = 3$) et le système a bien une unique solution.

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ de l'exemple 17 est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -0.2 & 1.6 \\ 0 & 1 & 1 & -0.4 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc elle est de rang $r = 2$.

   Elle est (par exemple) associée au système

$$\begin{cases} x+2y+3z-\ \ t+4u=0 \\ 2x-\ \ y+\ \ z\qquad +2u=0 \\ \qquad 5y+5z-2t+6u=0 \end{cases},$$

   qui lui-même est équivalent à

$$\begin{cases} x\quad +z-0.2t+1.6u \ \ =0 \\ \quad y+z-0.4t+1.2u \ \ =0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0=0 \end{cases},$$

   dont les solutions sont de la forme

$$\begin{aligned}(x,y,z,t,u) &= (-z+0.2t-1.6u, -z+0.4t-1.2u, z, t, u) \\ &= z(-1,-1,1,0,0)+t(0.2,0.4,0,1,0)+u(-1.6,-1.2,0,0,1),\end{aligned}$$

   avec z, t u dans $\mathbb{R}$.

   On a $p - r = 5 - 2 = 3$ inconnues secondaires (z, t et u) pour paramétrer les solutions – les inconnues principales étant x et y.

Remarques.

- Lorsqu'il y a des solutions, on voit la relation

$$\text{nombre de colonnes} = \text{rang} + \text{nombre de paramètres de la solution.}$$

- Si on avait abouti au système

$$\begin{cases} x \quad + z - 0.2t + 1.6u & = 0 \\ \quad y + z - 0.4t + 1.2u & = 0\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = 1 \end{cases}$$

il n'y aurait eu aucune solution.

Exercices

Exercices 21 et 22

IV. Matrices inversibles

Définition 16

- Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

- Lorsque A est inversible, on note A^{-1} son inverse.
- On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrice inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'une des deux conditions $AB = I_n$ (inversibilité à droite) ou $BA = I_n$ (inversibilité à gauche) entraîne automatiquement l'autre, donc :

Proposition 9

Pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible, il suffit qu'elle soit inversible à droite ou à gauche.

Par ailleurs :

Proposition 10

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, son inverse est unique.

Proposition 11

Une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de taille 2 est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 19

La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible, puisque $7 \times (-2) - (-4) \times 3 = -2 \neq 0$. Son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1.5 & -3.5 \end{pmatrix}.$$

Remarque.
Le nombre $ad - bc$ est appelé déterminant de A et noté $\det A$. C'est aussi bien sûr le déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, dont les coordonnées sont les colonnes de la matrice A.

On démontre en exercice :

Proposition 12

Si A et B sont deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercices

Exercices 23 à 27

Venons-en au lien entre inverse de matrice et système linéaire :

Proposition 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible.
2. Pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = Y$ a une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. Le rang de A est égal à n.

Démonstration (de $1 \implies 2$)

Par analyse synthèse :

- **Analyse.** Si $AX = Y$, alors

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}Y \\ I_nX &= A^{-1}Y \\ X &= A^{-1}Y. \end{aligned}$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si $X = A^{-1}Y$, alors

$$AX = AA^{-1}Y = I_nY = Y.$$

Exemple 20

Le système

$$(S) : \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

s'écrit $AX = Y$, avec $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a vu (exemple 19) que A était inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1.5 & -3.5 \end{pmatrix}$. Le système (S) a donc pour unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1.5 & -3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

soit $(x, y) = (1, 1)$.

Exercices

Exercice 28

Pour conclure cette section, on donne deux méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice :

- via la résolution d'un système $AX = Y$ (exemple 21) ;
- via des opérations élémentaires réalisées en parallèle sur les matrices A et I_n (exemple 22).

Exemple 21

On calcule l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Pour cela, on fixe $Y=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et on résout le système $AX=Y$. On sait que la solution est $X=A^{-1}Y$, donc on lira directement les coefficients de A^{-1} à partir des coordonnées de la solution.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+3y+\ \ z=\alpha & & L_1\\ -2x+\ \ y-\ \ z=\beta & & L_2\\ x\qquad +2z=\gamma & & L_3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+3y+z=\alpha & L_1\longleftarrow L_1\\ 7y+z=2\alpha+\beta & L_2\longleftarrow L_2+2L_1\\ -3y+z=-\alpha+\gamma & L_3\longleftarrow L_3-L_1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+\ 3y+\ \ z=\alpha & L_1\longleftarrow L_1\\ 21y+3z=6\alpha+3\beta & L_2\longleftarrow 3L_2\\ -21y+7z=-7\alpha+7\gamma & L_3\longleftarrow 7L_3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} x+\ 3y+\ \ \ z=\alpha & L_1\longleftarrow L_1\\ 21y+\ 3z=6\alpha+3\beta & L_2\longleftarrow L_2\\ 10z=-\alpha+3\beta+7\gamma & L_3\longleftarrow L_3+L_2\end{array}\right.$$

On en déduit que l'unique solution est donnée par

$$z=\frac{-\alpha+3\beta+7\gamma}{10}=-0.1\alpha+0.3\beta+0.7\gamma$$

$$\begin{aligned} y&=\frac{6\alpha+3\beta-3z}{21}=\frac{6\alpha+3\beta+0.3\alpha-0.9\beta-2.1\gamma}{21}\\ &=0.3\alpha+0.1\beta-0.1\gamma\\ x&=\alpha-3y-z\\ &=\alpha-0.9\alpha-0.3\beta+0.3\gamma+0.1\alpha-0.3\beta-0.7\gamma\\ &=0.2\alpha-0.6\beta-0.4\gamma.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.2 & -0.6 & -0.4\\ 0.3 & 0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & -0.6 & -0.4\\ 0.3 & 0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.3 & 0.7\end{pmatrix}.$$

Remarque.
Pour résoudre le système de l'exemple précédent, on peut aussi opérer sur les lignes de la matrice associée.

Exercices

Exercice 29

Exemple 22

On calcule l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

On effectue parallèlement des opérations successives sur la matrice A et sur la matrice I_3 jusqu'à ce que A soit transformée en I_3.

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) & \begin{array}{l} L_1\\ L_2\\ L_3\end{array}\end{array}$$

Exemple 22 – Suite

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -21 & 7 & -7 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 7L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0.3 & 0.7 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{10}L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1.1 & -0.3 & -0.7 \\ 0 & 21 & 0 & 6.3 & 2.1 & -2.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0.3 & 0.7 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1.1 & -0.3 & -0.7 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0.3 & 0.7 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{21}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.2 & -0.6 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 & 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.1 & 0.3 & 0.7 \end{array}\right) \begin{array}{r} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

La matrice A^{-1} apparaît à droite à la dernière étape.

Exercices

Exercice 30

V. Introduction à l'algèbre linéaire

On généralise la notion de vecteur du plan (dimension 2) – de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – et de l'espace (dimension 3) – de la forme $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – à l'espace de dimension n. On aura par exemple vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans l'espace de dimension 4.

Définition 17

Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille de p vecteurs de l'espace de dimension n. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est :

- liée s'il existe $\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\right) \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ tel que
$$\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{u_p} = \vec{0}\ ;$$
- libre si elle n'est pas liée ;
- génératrice de l'espace de dimension n si, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe $\left(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\right) \in \mathbb{R}^p$ tel que
$$\vec{u} = \lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{u_p}.$$

Exemple 23

Soient $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace de dimension 3 et soit $\mathscr{F}=\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\right)$.
La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ?

Pour répondre à cette question, il faut savoir s'il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ tel que $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_p\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0}$.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$. L'égalité

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_3\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{0}$$

se réécrit

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

ou encore

$$(S):\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0\\-2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_1+2\lambda_3=0\end{cases}.$$

La matrice associée à ce système est $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\-2&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$, que l'on a déjà rencontrée dans les exemples 21 et 22. On a vu que A était de rang 3 (puisqu'elle est inversible), donc le système (S) a une seule solution ; et comme $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$ est solution évidente, c'est la seule solution.

Par conséquent, le seul triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_p\overrightarrow{u_p}=\overrightarrow{0}$ est $(0,0,0)$; et la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Exemple 24

On reprend l'exemple précédent. La famille $\mathscr{F}$ est-elle génératrice de l'espace de dimension 3 ?

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Existe-t-il un triplet $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_3\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{u}\ ?$$

En raisonnant comme pour l'étude de la liberté, cela revient à savoir si le système

$$\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=\alpha\\-2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=\beta\\\lambda_1+2\lambda_3=\gamma\end{cases}$$

admet au moins une solution ; ce qui est bien le cas, puisque A est de rang 3.

Comme ceci est vrai pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, la famille $\mathscr{F}$ est génératrice.

Exercices

Exercices 31 et 32

VI. Exercices

Exercice 1.
On pose $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 3 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & -5 & 1\end{pmatrix}$.

1. Donner les valeurs des coefficients a_{12}, a_{23}, b_{22}.
2. Calculer $A+B$ et $2A-3B$.

Exercice 2.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles et des garçons par filière dans un lycée. En supprimant les intitulés, on obtient la matrice A :

	Filles	Garçons
Général	124	96
Techno	45	112
Pro	13	84

$$A=\begin{pmatrix}124 & 96\\ 45 & 112\\ 13 & 84\end{pmatrix}$$

Écrire sous forme de somme, en utilisant les coefficients de la matrice A :

1. Le nombre total de filles du lycée.
2. Le nombre total d'élèves en série technologique.

Exercice 3 (🏛).
À la cantine, Inès a mangé 120 g de poisson et 100 g de riz, Mathéo a mangé 180 g de poisson et 150 g de riz.
Le tableau ci-dessous indique la teneur en glucides, protides, lipides (mesurée en grammes) d'une portion de 100 g de poisson et d'une portion de 100 g de riz.

	Poisson	Riz
Glucides	0	29
Lipides	16	3
Protides	1	0

On considère les matrices :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 29\\ 16 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1{,}2 & 1{,}8\\ 1 & 1{,}5\end{pmatrix}$$

Calculer, à l'aide des matrices A et B, la consommation d'Inès et de Mathéo en glucides, lipides et protides.

Exercice 4 (🏛).
On considère les matrices

$$K=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ K'=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}8 & 5 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}.$$

Parmi les produits suivants, dire ceux qui ont un sens. Lorsque c'est le cas, effectuer le calcul :

$$KK' \quad , \quad K'K \quad , \quad KL \quad , \quad KV \quad , \quad LV \quad , \quad VL.$$

Exercice 5 (🏛).
Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Calculer $J^2=J\times J$.

Exercice 6 (🏛).
Soit $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice X telle que AX soit la i−ème colonne de A.
2. Déterminer une matrice Y telle que YA soit la j−ème ligne de A.

Exercice 7.
On identifiera chaque point du plan de coordonnées $(x;y)$ à la matrice $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

1. Donner sans justification la nature géométrique de la transformation s du plan qui, à tout point M de coordonnées $(x;y)$, associe le point $s(M)$ de coordonnées $(y;x)$.
2. Écrire « la matrice de la transformation s ».

Exercice 8 (🏛).
Soient A, B deux matrices carrées de même taille. Démontrer l'équivalence :

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \iff AB=BA.$$

Exercice 9 (🏛).
Soit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Exprimer D^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (🏛).
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (🏛).
On reprend l'exercice précédent et on pose $N = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2.
2. Retrouver la formule pour A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 12 (🏛).
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - 5A + 4I_3 = 0$.
2. En déduire : $A^3 = 21A - 20I_3$.

Exercice 13 (🏅).
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2 et N^3. Que peut-on en déduire pour N^k lorsque $k \geq 3$?
2. Déterminer une formule pour A^n, lorsque $n \geq 2$.

   Indication : On étudiera d'abord les cas $n = 2$, puis $n = 3$.

Exercice 14 (🏅).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Traduire simplement en français :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ \left(i \neq j \implies a_{ij} = 0\right).$$
2. Écrire avec des quantificateurs :
   a. Il existe une colonne de A dont tous les coefficients sont nuls.
   b. A est triangulaire supérieure.

Exercice 15 (🏛).
Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = -1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 2x - y + z = -3 \\ y - 2z = 10 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y + 4z - t = -7 \\ -x - 4y + t = -6 \\ 3x - z - 2t = -2 \end{cases}$

Exercice 16 (🏛).
Déterminer une fonction f de degré 2 vérifiant
$$f(1) = 1\ ;\ f(-1) = 2\ ;\ f(2) = 0.$$

Exercice 17 (🏛).
Résoudre le système
$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ -x + 4y + 3z = 0 \end{cases}.$$
Interpréter géométriquement.

Exercice 18 (🏛).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $P : 2x - y + z = 1$ et $P' : -x + y + z = 4$.

Exercice 19 (🏛).
Écrire sous forme matricielle les systèmes des exercices 17 et 18.

Exercice 20 (🏛).
Résoudre les deux premiers systèmes de l'exercice 15 par opérations sur les lignes de la matrice associée.

Exercice 21 (🏛).
Déterminer le rang des matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 (🏛).

1. Écrire chaque matrice sous forme échelonnée réduite en lignes, puis déterminer son rang :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0&4\\0&1&1&-3\\1&0&2&-2\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&3\\2&-4&1\\-2&3&0\\4&0&1\end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système :

$$\begin{cases}x-2y\qquad+4t=0\\ \qquad y+\ z-3t=0\\ x\qquad +2z-2t=0\end{cases}$$

Exercice 23 (🏛).

1. On suppose que $ad-bc\neq 0$. Vérifier qu'en prenant $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $B=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$, on obtient bien $AB=BA=I_2$.
2. Prouver que $A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&-5\end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 24 (🏛).
On reprend la matrice de l'exercice 12 : $A=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$. On rappelle que $A^2-5A+4I_3=0$.

Prouver que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 25 (🏛).
On reprend les matrices de l'exercice 13 :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad,\quad N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

1. Prouver que $N^3=A^3-3A^2+3A-I_3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 26.
Démontrer la proposition 12.

Exercice 27 (🏛).
Soient $A=\begin{pmatrix}11&-15\\6&-8\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A=PDP^{-1}$.
2. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$A^n=PD^nP^{-1}.$$
3. Exprimer A^n en fonction de n.

Exercice 28 (🏛).

1. On considère le système $\begin{cases}2x+3y=1\\3x+5y=2\end{cases}$.
Traduire le système sous forme matricielle, puis le résoudre en utilisant l'inverse d'une matrice.
2. Reprendre la question 1 avec le système $\begin{cases}2x-y=3\\3x+y=-1\end{cases}$.

Exercice 29 (🏛).
Calculer l'inverse des matrices en résolvant un système :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\5&6&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 30 (🏛).
Reprendre l'exercice précédent et calculer l'inverse des matrices par opération sur les lignes.

Dans les exercices 31 et 32, on pourra utiliser certains résultats déjà démontrés dans les exercices précédents.

Exercice 31 (🏛).
Soient $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$.

Démontrer que la famille $\mathscr{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ est une famille libre et génératrice de l'espace.

Exercice 32 (🏛).
Soient $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$.

La famille $\mathscr{F}=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3},\overrightarrow{u_4})$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de l'espace ?