Chapitre 10 : Dénombrement

I. Permutations et listes

Définition 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

On pose également $0! = 1$.

Le nombre $n!$ se lit « factorielle n », ou « n factorielle ».

Exemple 1

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$

Définition 2

Soit E un ensemble non vide. On appelle permutation de E tout « mélange » des éléments de E (l'opération qui consiste à ne rien faire est considérée comme un mélange).

Remarque.
On donnera une définition plus formelle à la fin de la section 2.

Exemple 2

Soit $E = \{1;2;3\}$. Les permutations de E sont

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Proposition 1

Si E a n éléments, il y a $n!$ permutations possibles des éléments de E.

Déf.3

Soit E un ensemble non vide. On appelle k-liste (ou k-uplet) d'éléments de E une liste de k éléments de E, éventuellement répétés.

Exemple 3

On prend $E = \{0;1;2\}$. Une 5-liste d'éléments de E est (par exemple)

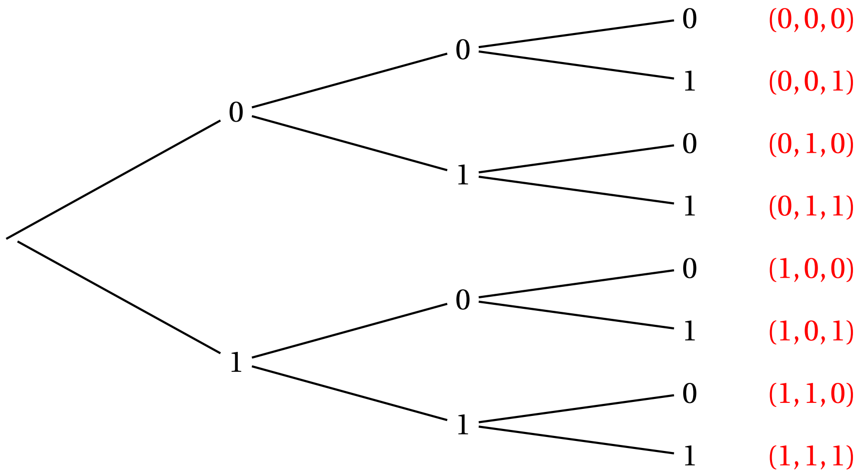
$$(0,1,0,2,1).$$

Exemple 4

On prend $E = \{0;1\}$. Les 3-listes (ou triplets) d'éléments de E sont

$$(0,0,0) \qquad (0,0,1) \qquad (0,1,0) \qquad (0,1,1) \qquad (1,0,0) \qquad (1,0,1) \qquad (1,1,0) \qquad (1,1,1).$$

Ces triplets sont représentés par les chemins de l'arbre ci-dessous :



On notera qu'il y a $2^3 = 8$ chemins (ou triplets) possibles.

Proposition 2

Si E a n éléments, il y a n^k k-listes possibles d'éléments de E.

Exemple 5

Quatre amis en vacances choisissent tous les jours au hasard celui des quatre qui fera la vaisselle (une personne donnée peut donc faire la vaisselle plusieurs fois ; mais aussi ne jamais la faire). S'ils partent 7 jours, il y a $4^7 = 4\,096$ plannings possibles pour la vaisselle.

On en vient à présent aux listes sans répétition, qu'on appelle arrangements :

Exemple 6

Dans une classe de 30 élèves, le professeur désigne chaque jour un élève différent pour venir au tableau. Si l'on prend 3 cours consécutifs, le nombre de choix d'élèves est

$$30 \times 29 \times 28 = 24\,360.$$

On remarque que

$$30 \times 29 \times 28 = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times \cdots \times 1}{27 \times 26 \times \cdots \times 1} = \frac{30!}{27!} = \frac{30!}{(30-3)!}.$$

On dit qu'il y a 24 360 arrangements de 3 élèves.

Plus généralement, on a la définition et la proposition :

Déf.4 Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) et soit $1 \leq k \leq n$. On appelle arrangement de k éléments de E une k-liste d'éléments distincts de E.

Proposition 3

Soit E un ensemble à n éléments et soit $1 \leq k \leq n$. Alors le nombre d'arrangements de k éléments de E est
$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exercices

Exercices 1 à 4

II. Ensembles et cardinaux

Déf. 5

Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E. Le cardinal de E est noté $|E|$ ou $\mathrm{Card}(E)$.

Exemple 7

$E = \{2;3;4;5\}$ est un ensemble de cardinal 4.

Déf. 6

Soient E, F deux ensembles. On dit que E est inclus dans F ou que E est une partie de F si tout élément de E est un élément de F. Dans ce cas on note $E \subset F$.

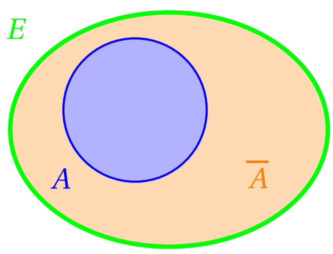
Définition 7

L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

- Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$.
- $|\varnothing| = 0$.

Définition 8

Étant donné un ensemble E et une partie A de E, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Notations : $E \setminus A$, $\overline{A}$ ou A^c.



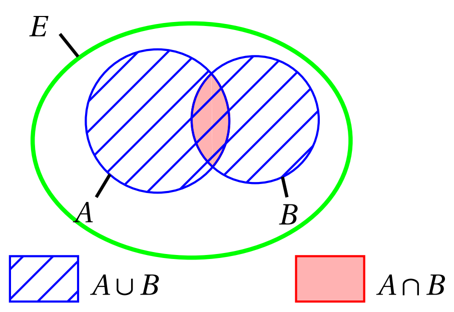
Proposition 4

Soient E un ensemble fini et A une partie de E. On a alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Définition 9

Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E :

- la réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.
- l'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.



Proposition 5

Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E. On a alors
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Déf. 10

On dit que deux ensembles A, B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, leur réunion est notée $A \sqcup B$.

Remarque.
Si A et B sont disjoints, la formule de la proposition 5 devient

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|.$$

Exemple 8

Soit $E = [\![1;100]\!]$. On considère deux sous-ensembles de E : l'ensemble A des multiples de 2 et l'ensemble B des multiples de 5. On a ainsi :

- $A = \{2;4;6;\ldots;100\}$, $\quad |A| = \frac{100}{2} = 50$;
- $B = \{5;10;15;\ldots;100\}$, $\quad |B| = \frac{100}{5} = 20$.

Par conséquent :

- $A \cap B$ est l'ensemble des nombres qui sont à la fois multiples de 2 et de 5; autrement dit l'ensemble des multiples de 10 :

$$A \cap B = \{10;20;30;\ldots;100\}, \qquad |A \cap B| = \frac{100}{10} = 10\,;$$

- $A \cup B$ est l'ensemble des nombres qui sont multiples de 2 ou de 5 (éventuellement des deux à la fois). Les éléments de $A \cup B$ sont moins évidents à décrire, mais on sait que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 50 + 20 - 10 = 60$.
- Notons enfin C l'ensemble des nombres qui ne sont multiples ni de 2, ni de 5.
  C est le complémentaire de $A \cup B$, donc

$$|C| = |E| - |A \cup B| = 100 - 60 = 40.$$

Conclusion : il y a 40 nombres entre 1 et 100 qui ne sont multiples ni de 2, ni de 5.

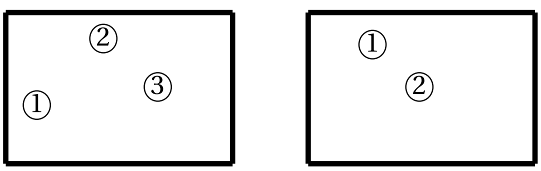
Déf. 11

Si A et B sont deux ensembles, le produit cartésien de A et B, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Exemple 9

L'urne A contient trois boules numérotées 1, 2, 3, l'urne B contient deux boules numérotées 1 et 2. On tire une boule dans chaque urne.



urne A — urne B

On note $A = \{1;2;3\}$ et $B = \{1;2\}$.

L'ensemble des tirages possibles est

$$A \times B = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2);(3,1);(3,2)\}.$$

Ces tirages correspondent aux cases du tableau ci-dessous :

B \ A	1	2	3
1			
2			

Lorsqu'on note $A \times B$, ce n'est pas une multiplication ; c'est seulement une notation pour le nouvel ensemble construit à partir de A et B. On a cependant la proposition :

Proposition 6

Si A et B sont deux ensembles non vides finis, $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Exemple 10

On revient sur l'exemple 9. On a bien

$$|A \times B| = 6 = 3 \times 2 = |A| \times |B|.$$

Remarque.
Dans le cas où $A = B$, on note aussi $A^2 = A \times A$. En particulier, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des couples de réels. Ainsi il est équivalent d'écrire

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ou

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Exercices

Exercices 5 à 8

Définition 12

Soient E et F deux ensembles. Une application (ou fonction) de E dans F (notation : $f : E \to F$) associe, à tout élément x dans E, un unique élément $f(x)$ dans F.

Remarque.
Dans un cours de 1re année, on emploie généralement le mot « fonction » lorsque E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Définition 13

Une application $f : E \to F$ est :

- injective si tout $y \in F$ admet **au plus un** antécédent dans E ;
- surjective si tout $y \in F$ admet **au moins un** antécédent dans E ;
- bijective si tout $y \in F$ admet **exactement un** antécédent dans E.

Exemples 11

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ est injective, mais elle n'est pas surjective (0 n'a pas d'antécédent).

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$ est bijective.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \end{array}$$

3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ n \mapsto |n|$ est surjective, mais elle n'est pas injective (tout entier ≥ 1 a deux antécédents).

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ \cdots & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

Exercices
Exercices 9 à 11

Proposition 7
Si E et F sont de même cardinal fini et si $f : E \to F$, alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Pour conclure cette section, on revient vers la notion de permutation, avec une définition plus rigoureuse :

Déf. 14 Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E toute application bijective $f : E \to E$.

III. Combinaisons

Définition 15

- Soient $1 \leq k \leq n$ deux entiers. Le nombre $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons que l'on a de choisir k éléments dans un ensemble à n éléments, l'ordre dans lequel le choix a été fait n'ayant pas d'importance.
- Par convention $\binom{n}{0} = 1$.
- $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ». On dit aussi que $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments.

Exemple 12

Par exemple $\binom{4}{2} = 6$, puisque les choix possibles de 2 éléments parmi 4 éléments A, B, C, D sont :

AB – AC – AD – BC – BD – CD

Remarque.
La différence avec les arrangements, c'est qu'on ne distingue pas les listes même si l'ordre est différent. Par exemple, lorsqu'on calcule $\binom{4}{2} = 6$, les deux listes AB et BA comptent pour une seule.

Exemple 13

Un sachet contient 5 lettres A, B, C, D, E. On tire 3 lettres du sachet, on compte le nombre de tirages possibles [a].

Si l'ordre de sortie avait de l'importance, cela reviendrait à compter le nombre d'arrangements de 3 éléments : il y en aurait $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Mais l'ordre de sortie n'a pas d'importance, donc chaque tirage de 3 lettres est compté $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ fois.
Par exemple, les tirages

ABC – ACB – BAC – BCA – CAB – CBA

ne doivent compter que pour un seul. Finalement, il n'y a que $\frac{60}{6} = 10$ tirages possibles.
On peut d'ailleurs les énumérer :

ABC – ABD – ABE – ACD – ACE – ADE – BCD – BCE – BDE – CDE

Notons pour finir que $10 = \frac{60}{6} = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \times 2!}$, ce que généralise la proposition suivante.

a. On décide que l'ordre dans lequel les lettres sortent n'a pas d'importance.

Proposition 8

Soient $0 \leq k \leq n$ deux entiers. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Exemple 14

On tire au sort 4 personnes dans un groupe de 12 pour partir en voyage. Il y a

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times (12-4)!} = \frac{12!}{4! \times 8!} = 495$$

quatuors possibles.

Remarque.
La proposition 8 fonctionne encore quand $k = 0$:

$$\frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 = \binom{n}{0},$$

conformément à la définition 15.

Pour obtenir les $\binom{n}{k}$, on utilise :

- soit le triangle de Pascal, pour les petites valeurs de n ;[1]
- soit la calculatrice, pour les grandes valeurs de n.

Exemple 15

$\binom{4}{2} = 6$ avec le triangle de Pascal :

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

Exemple 16

$\binom{12}{4} = 495$ avec la calculatrice :

Calculatrices collège

Il faut écrire le calcul (le symbole ! est sur le clavier) :

$$\frac{12!}{4! \times 8!}$$

NUMWORKS

-
- Calculs $\boxed{\text{EXE}}$ puis (boîte à outils)
- choisir Probabilités, puis Dénombrement
- choisir binomial(n,k) $\boxed{\text{EXE}}$
- compléter $\binom{12}{4}$ $\boxed{\text{EXE}}$

TI graphiques

- $\boxed{\text{math}}$ puis $\boxed{\text{PROB}}$
- 3 :Combinaison $\boxed{\text{EXE}}$
- ${}_{12}C_4$ $\boxed{\text{EXE}}$

CASIO graphiques

- $\boxed{\text{MENU}}$ puis $\boxed{\text{RUN}}$ $\boxed{\text{EXE}}$
- 12 $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\triangleright}$
- $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc PROB)
- $\boxed{\text{F3}}$ (on choisit donc nCr)
- 4 $\boxed{\text{EXE}}$ (on affiche 12**C**4 à l'écran avant d'exécuter)

1. Le lien entre les $\binom{n}{k}$ et le triangle de Pascal est expliqué en exercices.

Les résultats de la proposition suivante sont justifiés en exercice :

Proposition 9

1. Si $n \geq 1$: $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. **2.** Si $n \geq 2$: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. **3.** Si $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exercices

Exercices 12 à 17

Exemple 17

On choisit 5 cartes dans un jeu de 32.

- Il y a $\binom{32}{5}$ tirages (ou mains) possibles.
- On compte le nombre de mains contenant une paire de rois : il y a $\binom{4}{2}$ façons possibles de choisir les rois, puis $\binom{28}{3}$ façons de choisir trois autres cartes parmi les 28 « non-rois », donc au total $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$ mains contenant 2 rois [a].

---

a. Il faut bien multiplier. En effet, si A désigne l'ensemble des couples de rois possibles (il y en a donc $\binom{4}{2} = 6$: cœur-carreau, cœur-pique, cœur-trèfle, carreau-pique, carreau-trèfle, pique-trèfle), et B l'ensemble des triplets de cartes possibles à choisir parmi les 28 non-rois (il y en $\binom{28}{3} = 3\,276$), alors l'ensemble des mains contenant 2 rois s'identifie à $A \times B$: on écrit successivement les deux rois, puis les trois autres cartes – une main est de la forme $\underbrace{\text{Roi–Roi}}_{6 \text{ possibilités}} - \underbrace{\text{Non-roi–Non-roi–Non-roi}}_{3\,276 \text{ possibilités}}$, comme par exemple R♢–R♣–V♠–10♡–V♣.

Exercices

Exercices 18 à 21

Exemple 18 (récapitulatif)

Un sachet contient 5 jetons marqués A, B, C, D, E. Dans les exemples ci-dessous, on examine les trois situations standards.

- On tire 3 jetons **avec remise**. **On tient compte de l'ordre** du tirage. On parle de 3-liste d'un ensemble à 5 éléments.

  Exemples de tirages : ABE – BEA – DCA – BBD

  Il y a $5^3 = 125$ tirages possibles.

- On tire 3 jetons **sans remise**. **On tient compte de l'ordre** du tirage. On parle d'arrangement de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments.

  Exemples de tirages : ABE – BEA – DCA – ~~BBD~~

  Il y a $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages possibles.

- On tire 3 jetons **sans remise**. **On ne tient pas compte de l'ordre** du tirage. On parle de combinaison de 3 éléments d'un ensemble à 5 éléments.

  Exemples de tirages : ABE – ~~BEA~~ – DCA – ~~BBD~~

  Il y a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ tirages possibles.

Pour conclure ce chapitre, on se donne deux complexes a, b et on s'intéresse au développement de $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, etc. On peut obtenir une formule générale par une méthode de dénombrement (voir exercices pour l'explication) :

Théorème 1 (formule du binôme de Newton)

Pour tous complexes a, b, pour tout entier $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 19

Pour tous complexes a, b :

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^k b^{3-k} = \binom{3}{0} a^0 b^{3-0} + \binom{3}{1} a^1 b^{3-1} + \binom{3}{2} a^2 b^{3-2} + \binom{3}{3} a^3 b^{3-3} = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b + a^3.$$

Exercices

Exercices 22 à 24

Déf. 16 Si A est un ensemble, on note $\mathscr{P}(A)$ l'ensemble des parties de A.

Remarque.
Les $\binom{n}{k}$ sont aussi appelés coefficients binomiaux, en référence à la formule du binôme de Newton.

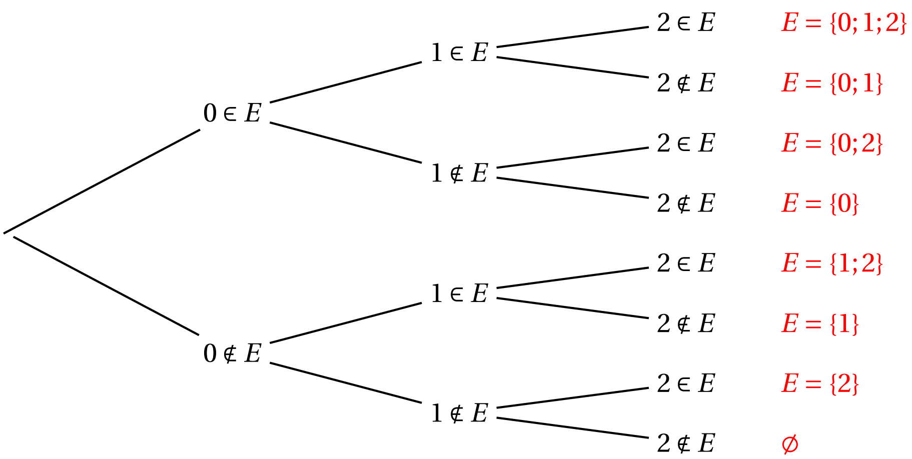
Remarque.
$\mathscr{P}(A)$ est donc une famille d'ensembles – un ensemble d'ensembles !

Exemple 20

Si $A = \{0;1;2\}$, l'ensemble $\mathscr{P}(A)$ est formé de :

$$\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0;1\},\ \{0;2\},\ \{1;2\},\ \{0;1;2\}.$$

Il contient 8 éléments, ce qui était prévisible : pour chacun des éléments 0, 1, 2, soit on choisit de le prendre, soit on choisit de le mettre de côté. Chaque partie E de A correspond donc à un chemin de l'arbre ci-dessous :



Proposition 10

Si l'ensemble A contient n éléments, alors $\mathscr{P}(A)$ en contient 2^n.

Remarque.
Il y a un lien avec la formule du binôme de Newton (voir exercices).

IV. Exercices

Exercice 1 (🏛).
Un clavier de 12 touches comportant les chiffres de 1 à 9 et les lettres A, B, C se trouve à l'entrée d'un immeuble. Pour accéder à cet immeuble, il faut composer un code à 4 symboles.

1. Combien y a-t-il de codes d'entrée possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes d'entrée ne comportant pas la lettre A ?
3. Combien y a-t-il de codes d'entrée formés de 4 symboles différents ?

Exercice 2 (🏛).

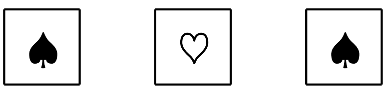
1. Combien le mot VOYAGE a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) ?
2. Même question avec le mot ANTILLES.

Exercice 3 (🏛).
Dans un test d'aptitude, on pose 10 questions à un candidat auxquelles il doit répondre par « Vrai » ou « Faux ».
De combien de façons différentes peut-il remplir ce questionnaire ?

Exercice 4 (🏛).
On interroge successivement les 30 élèves d'une classe et on leur demande de choisir chacun un nombre entre 1 et 200.

1. Combien y a-t-il de listes possibles ?
2. Combien y a-t-il de listes formées de 200 nombres différents ?

Exercice 5 (🏛).
Lorsqu'on actionne la manette d'une machine à sous, on fait apparaître sur l'écran trois symboles choisis au hasard parmi ♡ (cœur), ♢ (carreau), ♠ (pique) et ♣ (trèfle). On appelle « apparition » la liste des trois symboles qui apparaissent sur l'écran.



Combien y a-t-il d'apparitions :

1. Formées de trois symboles différents ?
2. Contenant au moins un cœur ?

Exercice 6 (🏛).
Lors de la finale des mondiaux d'athlétisme huit coureurs s'élancent. Trois de ces coureurs sont Américains.

1. Combien de podiums possibles y a-t-il (en distinguant le 1^{er}, le 2^{e} et le 3^{e} de la course) ?
2. Combien de podiums y a-t-il comportant au moins un Américain ?

Exercice 7 (🏛).
Un candidat à un examen connaît trois questions d'histoire sur les six possibles et deux questions de géographie sur les cinq possibles. Un examinateur lui pose une question d'histoire et une question de géographie.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où le candidat connaît les deux questions ? Au moins l'une des deux questions ?

Exercice 8 (🏛).
On lance 3 dés à 6 faces : un bleu, un rouge, un vert. On note le résultat des lancers sous la forme d'un triplet

$$\left(\text{n° du dé bleu}, \text{n° du dé rouge}, \text{n° du dé vert}\right).$$

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où on obtient 421 ? (Cela signifie que l'un des dés tombe sur 4, un autre sur 2, le dernier sur 1.)

Exercice 9 (🏛).
Dans chaque cas, on définit une application $f : E \to F$ par son tableau de valeurs. Dire si elle est injective, surjective, bijective.

1. $E = \{1;2;3\}$, $F = \{1;2;3;4\}$.

x	1	2	3
$f(x)$	4	2	1

2. $E = \{1;2;3;4\}$, $F = \{1;2;3\}$.

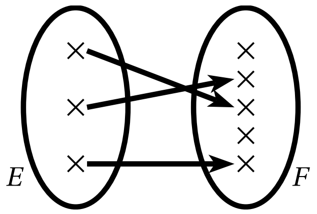
x	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	1	3

3. $E = \{1;2;3;4\}$, $F = \{1;2;3;4\}$.

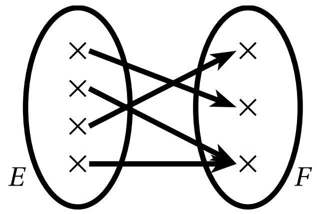
x	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	1	4

Exercice 10 (🏛).
On reprend l'exercice précédent, mais cette fois les éléments de E et F sont symbolisés par des croix et l'image d'un élément de E est indiquée par une flèche.

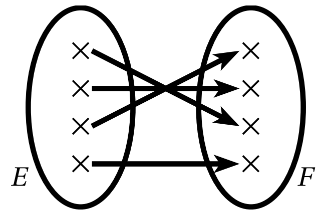
1.



2.



3.



Exercice 11 (🏛).
Dans chaque cas, dire si l'application f est injective, surjective, bijective.

1. $f : [-1;1] \to [-1;1]$, $x \mapsto x^2$.

2. $f : [-1;1] \to [0;1]$, $x \mapsto x^2$.

3. $f : [0;1] \to [0;1]$, $x \mapsto x^2$.

Exercice 12 (🏛).

1. Donner les valeurs explicites de

$$A = \binom{5}{2}, \quad B = \binom{6}{3}, \quad C = \binom{50}{1}, \quad D = \binom{4}{0}.$$

2. Comparer les nombres $\binom{10}{3}$ et $\binom{10}{7}$, puis les nombres $\binom{100}{60}$ et $\binom{100}{40}$. Généraliser.

Exercice 13 (🏛).

On coche trois numéros sur une grille de neuf cases numérotées de 1 à 9. Combien y a-t-il de grilles possibles?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Exercice 14 (🏛).
On prend 5 cartes dans un jeu de 32. Combien y a-t-il de mains possibles?

Exercice 15 (🏛).
Combien de poignées de mains sont-elles échangées lorsque les 24 élèves d'une classe se serrent tous la main le matin?

Exercice 16 (🏅).

1. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Que vaut $(p-1)! \times p$?

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$

3. Soient $1 \leq k \leq n$ deux entiers naturels. Démontrer la formule du pion :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}.$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \frac{1}{k!}$.

a. Prouver que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \; a_k - a_{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

b. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$.

Exercice 17 (– formule de Pascal).

Une association a vendu des calendriers dans le but de financer un voyage. Malheureusement, seuls 12 des 20 membres pourront effectivement partir compte tenu du peu d'argent récolté.

1. Quel est le nombre de groupes différents de 12 personnes que l'on peut constituer pour participer au voyage ?
2. David est un des membres de l'association. Combien y a-t-il :
   - de groupes de 12 personnes contenant David ?
   - de groupes de 12 personnes ne contenant pas David ?
3. Quelle égalité résulte des questions 1 et 2 ?
4. Généraliser : si $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} = \cdots + \cdots$$

5. Redémontrer par le calcul la formule obtenue à la question précédente.

Exercice 18 ().

Un sélectionneur d'une équipe de football dispose de vingt joueurs dont trois gardiens de but.
Combien d'équipes différentes de onze joueurs, dont un gardien, peut-il former ?

Exercice 19 ().

Une colonie de vacances compte 40 enfants et 5 moniteurs. Cette colonie possède un mini-bus de 12 places pour les excursions.
Sachant que deux moniteurs doivent accompagner les excursions, combien y a-t-il de remplissages possibles du mini-bus ?

Exercice 20 ().

Un jeu de 32 cartes est formé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as dans chacune des quatre couleurs cœur, carreau, pique, trèfle.

1. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes possibles ?
2. De mains contenant trois cœurs et deux carreaux ?
3. De mains contenant exactement 3 dames ?
4. De mains contenant exactement un roi et deux valets ?

Exercice 21.

Soient a, b deux complexes.

1. En écrivant $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ et en utilisant un raisonnement de dénombrement, prouver que

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Déterminer de même une formule pour $(a+b)^4$.

Exercice 22 ().

Soient a, b deux complexes. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les sommes :

1. $(a+b)^5$.
2. $(2a+1)^3$.
3. $(a-b)^4$.

Exercice 23 ().

1. Huit candidats se présentent à un concours d'orchestre. Les recruteurs peuvent choisir autant de candidats qu'ils le souhaitent, et même n'en choisir aucun s'ils estiment qu'ils n'ont pas le niveau suffisant.
   a. Si 3 candidats sont recrutés, montrer qu'il y a 56 façons possibles de les choisir.
   b. Si 7 candidats sont recrutés, de combien de façons différentes peuvent-ils être choisis ?
   c. Combien y a-t-il de recrutements différents possibles ? Écrire la réponse sous forme de somme, en utilisant les combinaisons.
   d. Montrer, par une autre méthode de dénombrement, qu'il y a 256 recrutements différents possibles.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En vous inspirant de la question précédente, donner la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Ensuite démontrer rigoureusement le résultat en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 24 ().

Soient n un entier naturel non nul et x un réel. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathrm{e}^{kx}$.