Chapitre 8 : Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

I. Bijection et fonction réciproque

Déf. 1 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. L'image de I par f est

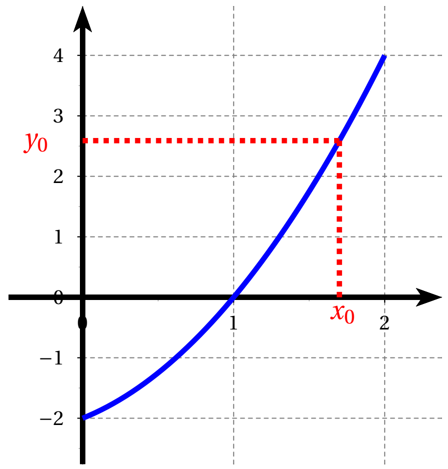
$$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}.$$

Exemple 1

Soit $f : [0;2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x - 2$.

Pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = 2x + 1$.
f' est strictement positive sur $[0;2]$, donc f est strictement croissante :

x	0	2
$f(x)$	-2	$\nearrow$ 4



L'image de l'intervalle $[0;2]$ par f est

$$f([0;2]) = [-2;4].$$

Notons par ailleurs que :

- tout nombre $x \in [0;2]$ a une image dans $[-2;4]$;
- tout nombre $y_0 \in [-2;4]$ a un unique antécédent x_0 dans $[0;2]$.

Dans cette situation, on dit que f réalise une bijection de $[0;2]$ sur $[-2;4]$.

Définition 2 Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f réalise une bijection de I sur J si :

- tout nombre $x \in I$ a une image $f(x)$ dans J ;
- tout nombre $y_0 \in J$ a un unique antécédent x_0 dans I.

De façon plus concise :

- $f(I) \subset J$;[a]
- $\forall y_0 \in J,\ \exists! x_0 \in I,\ f(x_0) = y_0$.

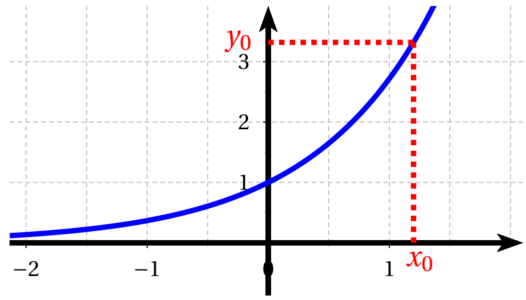
a. Rappel : $\subset$ se lit « est inclus dans ».

Exemple 2

La fonction exp réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$. On peut le voir

- soit sur le tableau de variations,
- soit sur la courbe représentative.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\exp(x)$	0	y_0	$+\infty$



Proposition 1

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exercices

Exercices 1 à 3

Définition 3

On suppose qu'une fonction f réalise une bijection de I sur J. Tout élément $y \in J$ a un unique antécédent x dans I. On pose alors $x = f^{-1}(y)$. On dit que la fonction

$$f^{-1} : J \to I,\ y \mapsto f^{-1}(y)$$

est la réciproque de f.

Exemple 3

La fonction exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$. Quelle est sa réciproque ?

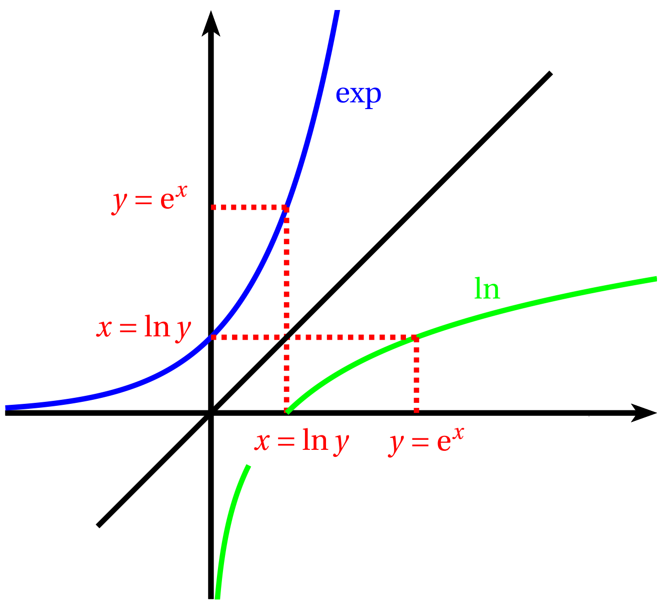
Pour le savoir, on prend y dans $]0;+\infty[$ et on cherche son antécédent par exp ; autrement dit, on résout l'équation

$$e^x = y.$$

On sait bien que la solution est

$$x = \ln y,$$

donc la réciproque de la fonction exp est la fonction ln. Avec les notations de la définition 3, si on pose $f = \exp$, alors $f^{-1} = \ln$.



Méthode

Dans la situation où f réalise une bijection de I sur J, pour déterminer sa réciproque, on prend y dans J et on résout l'équation $f(x) = y$. La solution $x = \cdots$ nous donne l'expression de f^{-1}.

Proposition 2

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to I$. La fonction f réalise une bijection de réciproque g si, et seulement si :

$$\forall x \in I, g \circ f(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J, f \circ g(y) = y.$$

Exemple 4

Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre et l'on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(e^x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in]0;+\infty[, e^{\ln y} = y.$$

Remarque.
La courbe d'une fonction et de sa réciproque sont toujours symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercices

Exercices 4 à 6

Théorème 1

Soit f une bijection de I sur J, soit $y_0 \in J$ et soit $x_0 = f^{-1}\left(y_0\right)$. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et

$$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0\right) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Remarques.

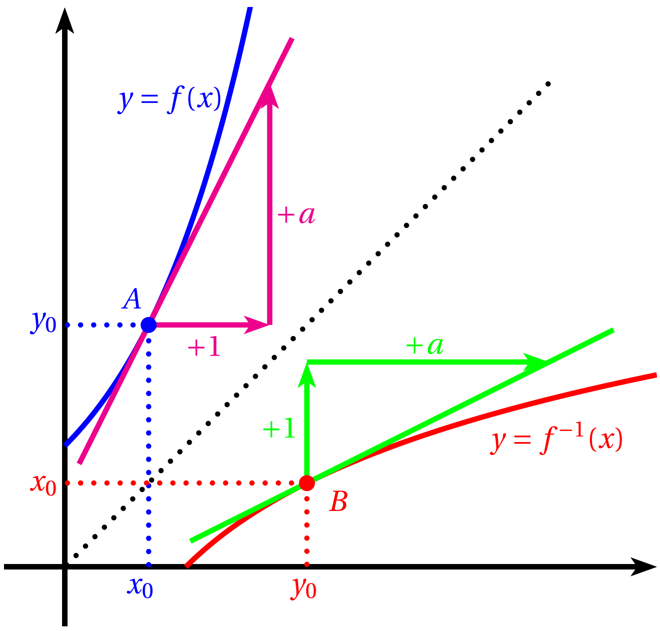
- Le théorème est illustré sur la figure ci-contre.
- Il est plus habituel de noter x la variable. Puisque $x_0 = f^{-1}\left(y_0\right)$ dans le théorème ci-dessus, on peut écrire :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Exercices

Exercices 7 et 8

Par raison de symétrie, les pentes des tangentes en A et en B sont inverses l'une de l'autre : la pente de la tangente en A vaut a, celle de la tangente en B vaut $\frac{1}{a}$.



II. Fonctions puissances

Dans cette section, on se réfère aux propriétés de l'exponentielle et du logarithme rappelées dans le chapitre 3 et on utilise ces connaissances pour donner la définition rigoureuse des puissances. On explique par exemple ce que signifie $5^{\frac{1}{2}}$, ou 3^0.

Déf. 4

Pour tout $x > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}.$$

Exemple 5

En prenant la définition ci-dessus : $2^3 = \mathrm{e}^{3\ln 2}$. C'est étonnant, car cela semble très éloigné de la définition habituelle. Et pourtant, d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$2^3 = \mathrm{e}^{3\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2+\ln 2+\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln 2} \times \mathrm{e}^{\ln 2} \times \mathrm{e}^{\ln 2} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

Ouf, on retombe bien sur la définition habituelle !

L'exemple qui précède se généralise :

Proposition 3

Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$.

Remarques.

- Pour tout $x > 0$: $x^0 = \mathrm{e}^{0\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1$.
- On retrouve sans peine toutes les propriétés des puissances (entières) que vous avez vues au collège, et qui sont généralisées dans la proposition 4 (ci-dessous).
- Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$ (puisque c'est une exponentielle).

Proposition 4

Pour tous $x > 0$, $y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$:

1. $(xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$. **2.** $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$. **3.** $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$. **4.** $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

On démontre le point 1 (les autres points se démontrent de façon analogue) :

Démonstration (du point 1)

D'après la définition 4 et d'après les propriétés du logarithme et de l'exponentielle :

$$(xy)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln(xy)} = \mathrm{e}^{\alpha(\ln x+\ln y)} = \mathrm{e}^{\alpha\ln x+\alpha\ln y} = \mathrm{e}^{\alpha\ln x} \times \mathrm{e}^{\alpha\ln y} = x^\alpha \times y^\alpha.$$

L'intérêt principal de la définition 4 est de calculer x^α lorsque α n'est pas un entier. Voyons cela avec des exemples :

Exemples 6

1. Combien vaut $a = 5^{\frac{1}{2}}$? Pour le savoir, on calcule a^2 en utilisant la proposition 4 :

$$a^2 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{2}\times 2} = 5^1 = 5.$$

Or le seul nombre positif dont le carré vaut 5 est $\sqrt{5}$, donc

$$a = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

Avec le même calcul, on démontre facilement que pour tout $x > 0$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

2. $2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$.

Remarques.

- Dans la définition 4, x est un réel strictement positif. On s'autorise également à calculer x^α lorsque x est strictement négatif, mais uniquement quand α est un entier, en reprenant la définition habituelle (celle du collège). On pose également $0^\alpha = 0$ pour tout $\alpha > 0$.
- Le point 1 des exemples 6 se généralise : si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n}\times n} = x^1 = x$. On dit que $x^{\frac{1}{n}}$ est la racine n-ième de x ; on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (voir exercices).

Exercices

Exercices 9 à 13

Proposition 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction

$$f :]0;+\infty[\to]0;+\infty[,\ x \mapsto x^\alpha$$

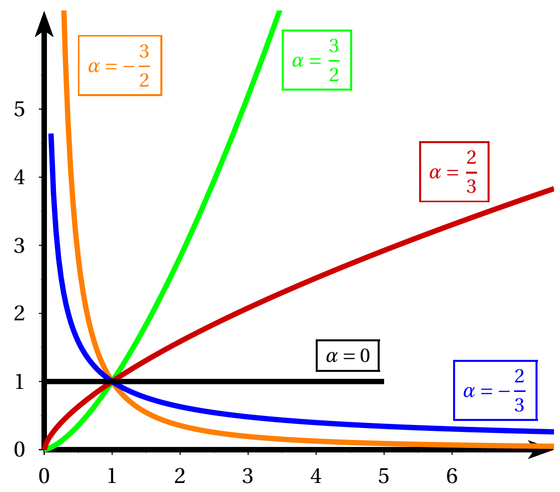
est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Proposition 6

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est :

- strict. croissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha > 0$;
- strict. décroissante sur $]0;+\infty[$ si $\alpha < 0$;
- constante égale à 1 si $\alpha = 0$.



Proposition 7 (croissances comparées)

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\beta x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\beta x} = 0.$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$
4. $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x^\alpha \ln x = 0.$

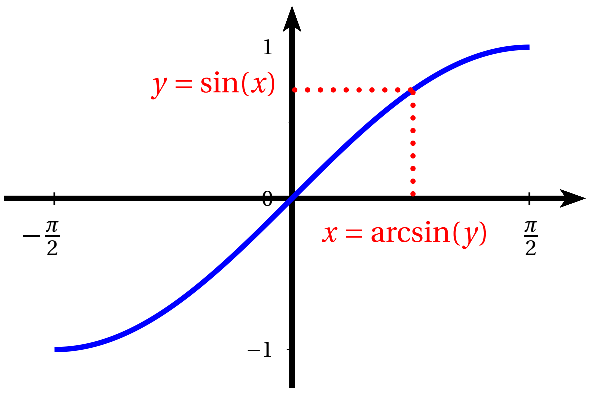
III. Fonctions circulaires réciproques

On commence avec la fonction arcsin, dont on détaille l'étude. On ira ensuite plus rapidement pour arccos et arctan.

Définition 5

La restriction de la fonction sin à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1;1]$. On appelle arcsin sa fonction réciproque. On a donc :

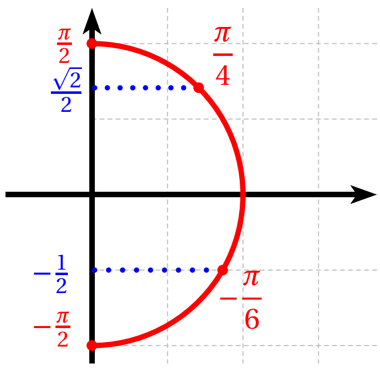
- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- $\forall y \in [-1;1], \sin(\arcsin y) = y$.



Remarque. On note $\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Exemples 7

1. $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
2. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, donc $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

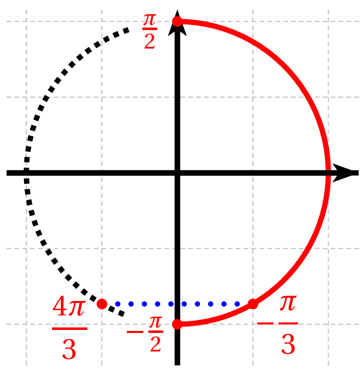


Attention

On n'a pas toujours $\arcsin(\sin x) = x$! Cela n'est vrai que quand $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Par exemple :

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

(on se ramène dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ pour pouvoir calculer).



Exercices

Exercices 14 et 15

Proposition 8

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration (🏅)

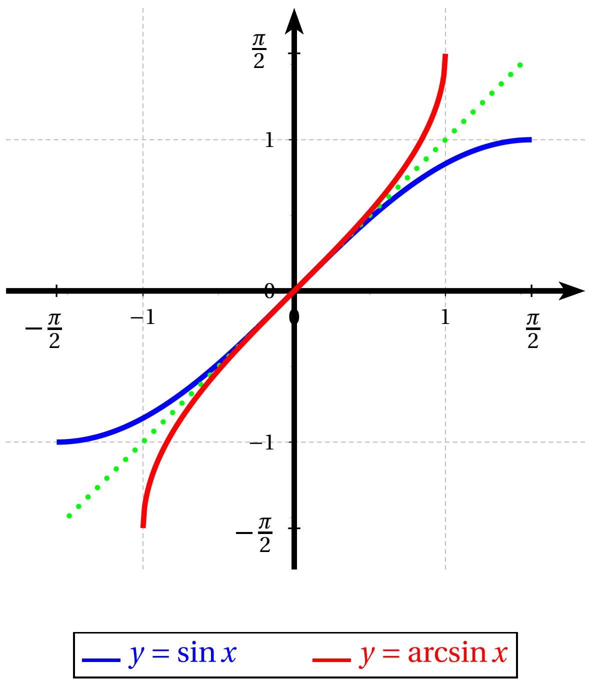
Soit $y_0 \in]-1;1[$ et soit $x_0 = \arcsin(y_0)$; on a donc $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable en x_0 et $(\sin)'(x_0) = \cos x_0$. Or $\cos x_0 \neq 0$, car $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc d'après le théorème 1, arcsin est dérivable en y_0 et

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(x_0)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))}.$$

On a vu dans l'exercice 15 que $\cos(\arcsin(y_0)) = \sqrt{1-y_0^2}$, donc on obtient la formule attendue :

$$(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y_0))} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$



x	-1		1
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	‖	$+$	‖
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

⚠ arcsin n'est dérivable ni en 1, ni en -1 (les tangentes à la courbe sont verticales).

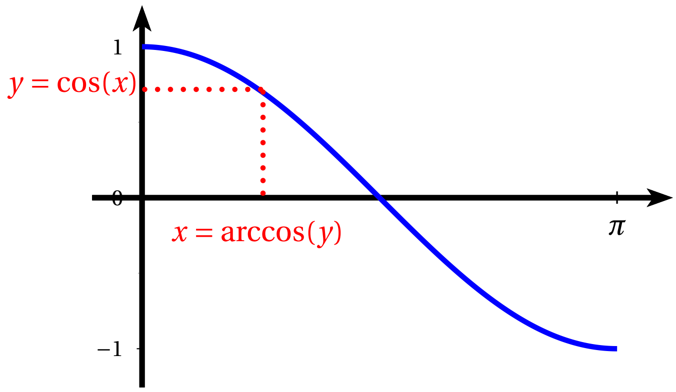
Exercices

Exercices 16 et 17

Définition 6

La restriction de la fonction cos à $[0;\pi]$ réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$.
On appelle arccos sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$.
- $\forall y \in [-1;1]$, $\cos(\arccos y) = y$.

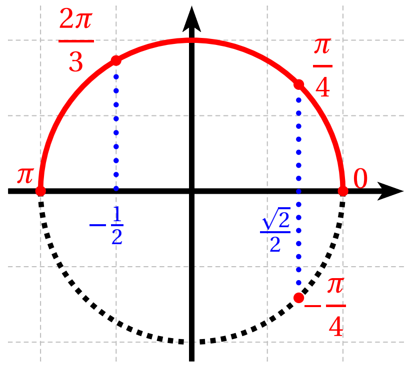


Attention

L'ensemble de définition des fonctions arccos et arcsin n'est pas le même.

Exemples 8

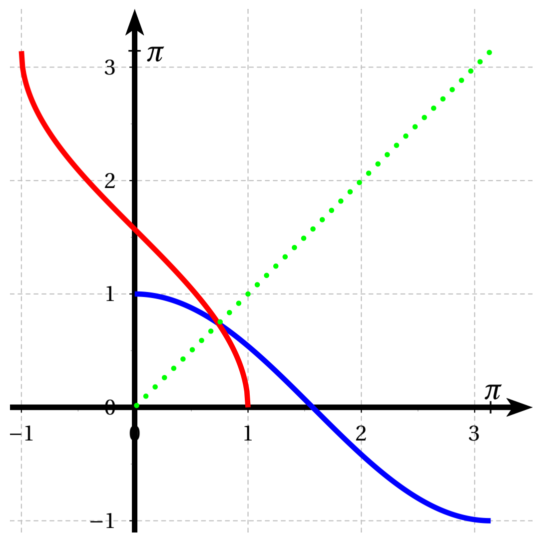
1. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.
3. ⚠ $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

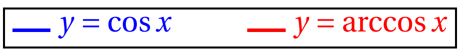


Proposition 9

La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$





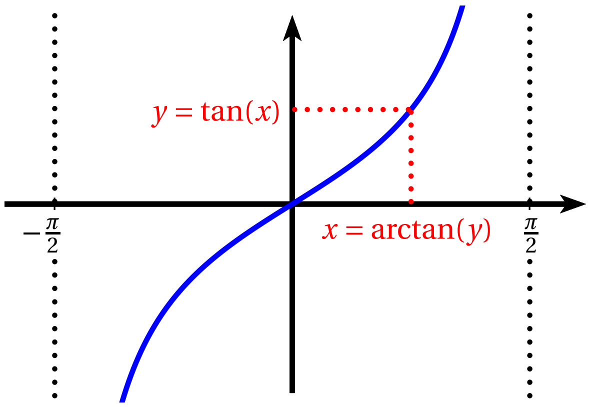
x	-1		1
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	‖	$-$	‖
$\arccos x$	π	$\searrow$	0

⚠ arccos n'est dérivable ni en 1, ni en -1

Définition 7

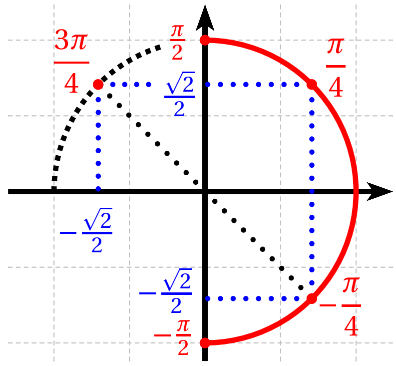
La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
On appelle arctan sa fonction réciproque. On a donc :

- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- $\forall y \in \mathbb{R}, \tan\left(\arctan y\right) = y$.



Exemples 9

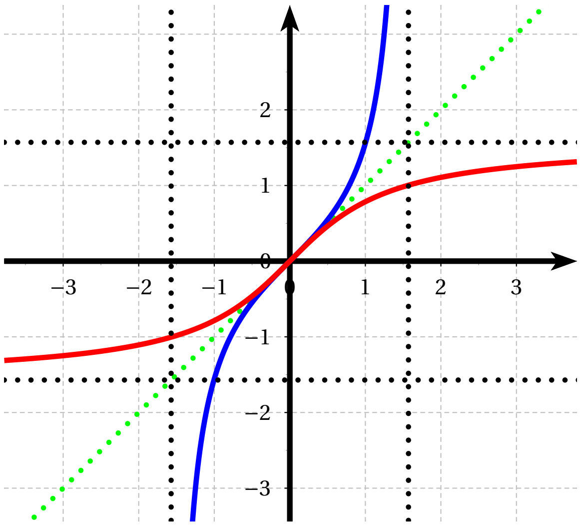
1. $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, donc $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
2. ⚠ La fonction tan est π-périodique, donc $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.



Proposition 10

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$\frac{1}{1+x^2}$	$+$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗ $\frac{\pi}{2}$

Exercices

Exercices 18 à 21

IV. Injection, surjection, bijection

On revient sur la notion de bijection, que nous avons étudiée dans la section 1.

Définition 8

Une fonction $f : I \to J$ est dite injective si deux réels distincts dans I ont des images distinctes.
De façon plus concise :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \left(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)\right)$$

Remarque. Il revient au même de dire que tout $y_0 \in J$ a au plus un antécédent dans I.

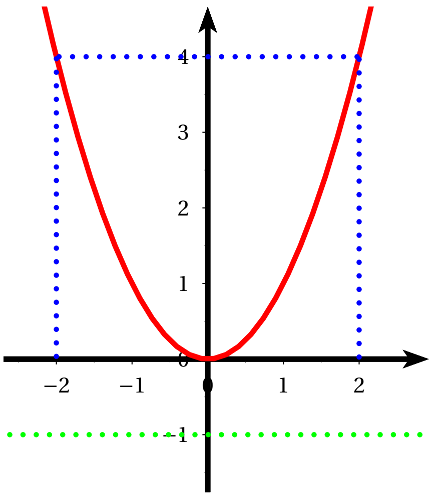
Définition 9

Une fonction $f : I \to J$ est dite surjective si tout réel dans J a au moins un antécédent dans I.
De façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists x_0 \in I, \ f(x_0) = y_0.$$

Exemple 10

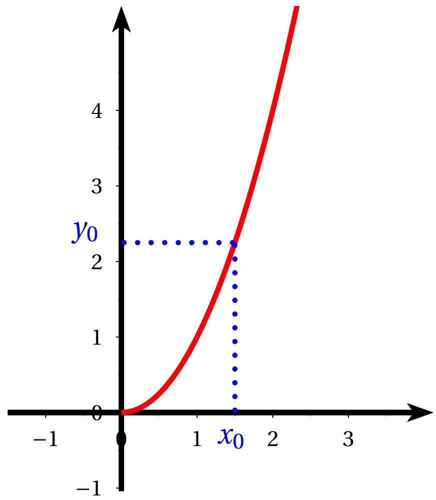
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2$.



La fonction f n'est ni injective, ni surjective :

- elle n'est pas injective, car (par exemple) -2 et 2 ont la même image :
$$f(-2) = f(2) = 4.$$
- elle n'est pas surjective, car (par exemple) -1 n'a pas d'antécédent.

Soit $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[, \ x \mapsto x^2$.



La fonction f est à la fois injective et surjective : tout $y_0 \in [0;+\infty[$ a un unique antécédent dans $[0;+\infty[$. Cet antécédent est $x_0 = \sqrt{y_0}$.

On dit que f est bijective.

On revient vers la notion de bijection :

Déf. 10

Une fonction $f : I \to J$ est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective. Autrement dit : tout réel $y_0 \in J$ a exactement un antécédent x_0 dans I. Ou de façon plus concise :

$$\forall y_0 \in J, \exists! x_0 \in I, \ f(x_0) = y_0.$$

On retrouve bien la définition de la section 1.

V. Exercices

Exercice 1 (🏛).
Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

1. Construire le tableau de variations de f en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

   f réalise une bijection de …… sur ……

Exercice 2 (🏛).
Soit $f : \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.

1. Construire le tableau de variations de f.
2. Recopier et compléter les pointillés :

   f réalise une bijection de …… sur ……

Exercice 3 (🏛).
Soit $f : \mathbb{R} \to [0;+\infty[\,,\ x \mapsto x^2$.
La fonction f réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0;+\infty[$?

Exercice 4 (🏛).
On reprend la fonction de l'exercice 1. Quelle est la bijection réciproque ?

Exercice 5 (🏛).
Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en faisant apparaître la limite en $+\infty$.
2. Recopier et compléter les pointillés :

   f réalise une bijection de …… sur ……

3. Déterminer la bijection réciproque.

Exercice 6 (🏛).
Soient $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[,\ x \mapsto x^2$ et $g : [0;+\infty[\to [0;+\infty[\,,\ x \mapsto \sqrt{x}$.
Prouver que les fonctions f et g sont les réciproques l'une de l'autre. Construire leurs courbes représentatives dans un même repère.

Exercice 7 (🏅).
Soit $y_0 \in\ ]0;+\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction ln est dérivable en y_0 et que $(\ln)'\left(y_0\right) = \dfrac{1}{y_0}$.

Exercice 8 (🏅).
Soit $y_0 \in\ ]0;+\infty[$. En utilisant le théorème 1, prouver que la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en y_0 et calculer $g'\left(y_0\right)$.

Exercice 9 (🏛).

1. Prouver que les nombres suivants sont égaux :
   - $A = 2^{\frac{3}{10}} \times 2^{\frac{1}{5}}$.
   - $B = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 \times 2^{-1}$.
   - $C = \dfrac{4^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{5}{6}}}$.
2. Démontrer que pour tout $x \geq 0$: $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$.

Exercice 10 (🏛).
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$.
2. Construire le tableau de variations de f et calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. On distinguera les cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

Exercice 11.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la réciproque de la fonction $f :]0;+\infty[\to]0;+\infty[\,,\ x \mapsto x^n$.
2. Calculer $9^{\frac{1}{2}}$ et $1000^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 12 (🏅).
Soit $\alpha > 0$. En utilisant l'un des résultats de croissance comparée du chapitre 3, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} = 0$.

Exercice 13 (🏛🏅).
Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$.

1. Prouver que $f'(x) = (\ln x + 1)\, x^x$ pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$.
2. Construire le tableau de variations de f. Calculer ses limites en 0 et en $+\infty$.

Exercice 14 (🏛).
Calculer :

1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\sin(\arcsin(0,85))$.
4. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arcsin(0,5))$.

Exercice 15 (🏛🏅).
Soit $x \in [-1;1]$

1. Quel est le signe de $\cos(\arcsin x)$?
2. Compléter les pointillés :

$$\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = \ldots\ldots$$

3. En déduire que

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 16 (🏛🏅).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Combien vaut $f(x)$?
3. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Encadrer $\pi - x$, puis prouver que $f(x) = \pi - x$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 17 (🏅).
Démontrer l'égalité :

$$\arcsin\left(\frac{7}{25}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

Indication : Calculer le sin de chacun des deux membres.

Exercice 18 (🏛).
Calculer :

1. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. $\cos(\arccos(0,85))$.
4. $\arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$.
5. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.
6. $\cos(2\arccos(0,5))$.

Exercice 19 (🏛).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arccos(\cos x)$.

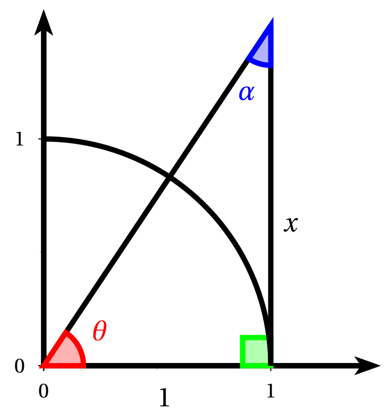
1. Étudier la parité et la périodicité de f.
2. Soit $x \in [0;\pi]$. Combien vaut $f(x)$?
3. Construire la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 20 (🏛).
Calculer :

1. $\arctan(-1)$.
2. $\arctan(\sqrt{3})$.
3. $\tan(\arctan(10))$.
4. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 21.

1. Sur la figure ci-dessous, exprimer $\tan\theta$ et $\tan\alpha$ en fonction de x.



2. Compléter les pointillés : pour tout $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \ldots\ldots$$