Chapitre 7 : Récurrence et sommes

I. Suites et récurrence

On commence par se rafraîchir la mémoire sur les suites définies par récurrence :

Exercices

Exercice 1

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison r si tout terme se déduit du précédent en lui ajoutant r :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Proposition 1

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r.$$

Exemple 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$. On a

$$u_0 = 3,\ u_1 = 3+2 = 5,\ u_2 = 5+2 = 7,$$
$$u_3 = 7+2 = 9,\ \ldots$$

Puis (par exemple)

$$u_{10} = u_0 + 10 \times r = 3 + 10 \times 2 = 23.$$

Définition 2

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison q si tout terme se déduit du précédent en le multipliant par q :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n \times q.$$

Proposition 2

Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n.$$

Exemple 2

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$. On a

$$v_0 = 3,\ v_1 = 3\times 2 = 6,\ v_2 = 6 \times 2 = 12,$$
$$v_3 = 12 \times 2 = 24,\ \ldots$$

Puis (par exemple)

$$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 3 \times 2^{10} = 3\,072.$$

Exercices

Exercices 2 à 4

Exemple 3

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $w_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = 0,5w_n + 1.$$

On pose également $v_n = w_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, puis en déduire une formule générale pour v_n et pour w_n en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= w_{n+1} - 2 && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= (0,5w_n + 1) - 2 && \text{(rel. réc. pour } (w_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}\\
&= 0,5w_n - 1 && \text{(calcul)}\\
&= 0,5\left(w_n - \frac{1}{0,5}\right) && \text{(factorisation!)}\\
&= 0,5(w_n - 2) && \text{(calcul)}\\
&= 0,5v_n. && \text{(déf. de } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{)}
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,5v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 0,5$. Et comme $v_0 = w_0 - 2 = 6 - 2 = 4$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,5^n.$$

Enfin $v_n = w_n - 2$ donc

$$w_n = v_n + 2 = 4 \times 0,5^n + 2.$$

Méthode

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme $w_{n+1} = aw_n + b$, avec $a = 0,5$ et $b = 1$. On dit qu'elle est arithmético-géométrique [a].

Si $a \notin \{0;1\}$, l'étude d'une suite arithmético-géométrique se ramène à celle d'une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison a. Il y a trois étapes :

❶ On prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. ⚠ À un moment, il faut mettre a en facteur.

❷ On en déduit une formule pour v_n ... ❸ puis une formule pour w_n.

a. C'est un peu un mélange de suite géométrique, avec le $0,5\times$, et de suite arithmétique, avec le $+1$.

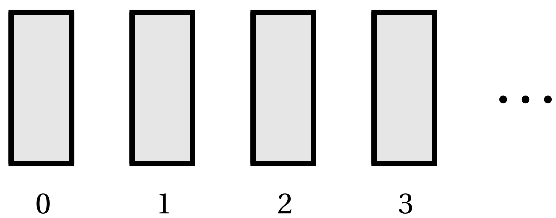
Exercices

Exercices 5 et 6

Exemple 4

Imaginons des dominos (en nombre infini) numérotés à partir de 0. On suppose que :

- le domino numéro 0 va tomber;
- les dominos sont positionnés de telle sorte que la chute du domino numéro k entraînera celle du numéro $k+1$, et ce pour tout entier naturel k.



Exemple 4 – Suite

Dans ce cas, le domino numéro 0 tombe, ce qui entraîne la chute du numéro 1, ce qui entraîne la chute du numéro 2, ce qui entraîne la chute du numéro 3, etc. De proche en proche, tous les dominos tombent.

La propriété $\mathscr{P}_n$: « le domino numéro n tombe » est donc vraie pour tout entier naturel n.

Proposition 3 (principe de récurrence)

Pour qu'une propriété $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit que :

1. **Initialisation.**
$$\mathscr{P}_0 \text{ soit vraie.}$$

2. **Hérédité.**
$$\forall k \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_k \text{ vraie}) \implies (\mathscr{P}_{k+1} \text{ vraie}).$$

Remarque.
Si on doit prouver que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on initialise à $n = 1$.

Exemple 5

On reprend la suite de l'exemple 3 : $w_0 = 6$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 0,5w_n + 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathscr{P}_n\ :\ w_n = 4 \times 0,5^n + 2.$$

Dans l'exemple 3, nous avons démontré cette formule à l'aide d'une suite récurrente annexe ; ici, on fait une démonstration par récurrence.

- **Initialisation.** On prouve que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{ll} w_0 & = 6 \\ 4 \times 0,5^0 + 2 & = 4 \times 1 + 2 = 6 \end{array}\right\} \implies \mathscr{P}_0 \text{ est vraie.}$$

- **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc
$$w_k = 4 \times 0,5^k + 2.$$

Objectif

Prouver que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire que

$$w_{k+1} = 4 \times 0,5^{k+1} + 2,$$

ou encore

$$0,5w_k + 1 = 4 \times 0,5^{k+1} + 2.$$

On part de

$$w_k = 4 \times 0,5^k + 2.$$

On multiplie par $0,5$:

$$\begin{aligned} w_k \times 0,5 &= \left(4 \times 0,5^k + 2\right) \times 0,5 \\ 0,5w_k &= 4 \times 0,5^k \times 0,5 + 2 \times 0,5 \\ 0,5w_k &= 4 \times 0,5^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Puis on ajoute 1 :

$$\begin{aligned} 0,5w_k + 1 &= 4 \times 0,5^{k+1} + 1 + 1 \\ w_{k+1} &= 4 \times 0,5^{k+1} + 2. \end{aligned}$$

La propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est donc vraie.

- **Conclusion.** $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque.
Il n'est pas obligatoire d'écrire la partie en vert. On conseille toutefois fortement de le faire pour fixer l'objectif de l'hérédité.

Exercices
Exercices 7 à 12

II. Sommes et produits

Exemples 6

1. $\sum_{k=3}^{7} k^2$ se lit « somme, pour k allant de 3 à 7, des k^2 ». On a ainsi
$$\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 (= 135).$$

Remarque.
$3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$ s'appelle « écriture in extenso » de la somme.

2. L'indice de sommation (la lettre k) est « muet » et peut être modifié :
$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{j} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

3. $\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+\cdots+9+10 = 55.$

D'une manière générale :

Définition 3

Si $m \leq n$ sont deux entiers naturels et a_m, $a_{m+1}, \cdots$, a_n sont des complexes, le nombre
$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$
désigne la somme
$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Remarque.
L'intérêt du symbole $\sum$, c'est d'écrire les sommes rapidement et sans ambiguïté.

Proposition 4

Si n est un entier naturel non nul,
$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration

On note S la somme à calculer, que l'on écrit à l'endroit, puis à l'envers :
$$\begin{aligned} S &= 0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)+n \\ S &= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0 \end{aligned}$$

On ajoute membre à membre les deux lignes. On remarque que la somme de chaque couple d'une même couleur vaut toujours n :
$$S+S = \underbrace{n+n+n+\cdots+n+n+n}_{(n+1) \text{ termes}}.$$

On a donc
$$2S = n \times (n+1) \qquad S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercices

Exercices 13 à 17

Proposition 5

Si $m \leq n$ sont deux entiers naturels et λ est un complexe,

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda = (n-m+1)\lambda.$$

Démonstration

De m à n, il y a $(n-m+1)$ termes ⚠, donc

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda = \underbrace{\lambda+\lambda+\cdots+\lambda}_{(n-m+1)\text{ termes}} = (n-m+1)\lambda.$$

Proposition 6 (linéarité de la somme)

Soient λ, a_m, $a_{m+1}, \cdots$, a_n, b_m, $b_{m+1}, \cdots$, b_n des nombres complexes. Alors :

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k+b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$.
2. $\sum\limits_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$.

Démonstration

Il suffit d'écrire les sommes in extenso :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (a_k+b_k) &= (a_m+b_m)+(a_{m+1}+b_{m+1})+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n)+(b_m+b_{m+1}+\cdots+b_n) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.\end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda a_m + \lambda a_{m+1}+\cdots+\lambda a_n = \lambda(a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n) = \lambda\sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $S = \sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)$. On utilise la linéarité de la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = \sum_{k=0}^{n} 2k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1.$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = (n+1)$, donc

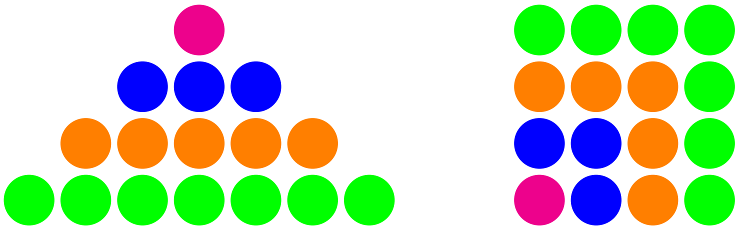
$$S = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = \cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + (n+1) = n(n+1)+1(n+1) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

La réponse, $(n+1)^2$, peut être obtenue par un joli raisonnement géométrique : l'écriture in extenso de S est

$$S = (2\times 0+1)+(2\times 1+1)+(2\times 2+1)+\cdots+(2\times n+1) = 1+3+5+\cdots+(2n+1)\,;$$

Exemple 7 – Suite

il s'agit de la somme des nombres impairs de 1 à $2n+1$. Or la somme des premiers nombres impairs est toujours un carré, comme le suggère la figure ci-dessous :



$$1+3+5+7 \quad = 4^2 = 16$$

Exercices

Exercices 18 à 20

Proposition 7 (somme télescopique)

Pour tous nombres complexes $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0.$$

Démonstration

On pose $S = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k)$. On écrit la somme en extension :

$$S = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n).$$

Les termes d'une même couleur se simplifient deux à deux :

$$S = \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} + \cdots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + a_{n+1} - \cancel{a_n}.$$

Il ne reste plus que les deux termes aux extrémités :

$$S = a_{n+1} - a_0.$$

Exemple 8

Avec $a_k = k^2$, la proposition 7 s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right) = (n+1)^2 - 0^2.$$

Or $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k+1$, donc on retrouve la formule de l'exemple 7 :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2.$$

Remarque.
Il faut souvent adapter le raisonnement à des situations particulières, par exemple avec des sommes qui ne sont pas indexées à partir de 0. Il est nécessaire pour cela d'avoir en tête la démonstration de la proposition 7.

La dernière idée à maîtriser sur les sommes est le changement d'indice :

Méthode (changement d'indice)
Soient $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1}$ des nombres complexes. On peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = a_{0+1} + a_{1+1} + a_{2+1} + \cdots + a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j.$$

Pour aller plus vite, on fait le raisonnement suivant :

- On pose $j = k+1$. Tous les $k+1$ doivent être remplacés par des j (s'il y avait des k, il faudrait les remplacer par des $j-1$).
- k allait de 0 à n, donc $j = k+1$ va de 1 à $n+1$.

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
$j=k+1$	1	2	3	$\cdots$	n	$n+1$

Exemple 9
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n \qquad (⚠\ q^0 = 1)$$

On utilise la linéarité et on fait un changement d'indice :

$$q \times S = q \times \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q \times q^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} q^j.$$

On calcule $\sum_{j=0}^{n+1} q^j$ de deux façons différentes, en utilisant ce qui précède :

$$\sum_{j=0}^{n+1} q^j = \begin{cases} q^0 + \sum_{j=1}^{n+1} q^j & = 1 + qS \\ \sum_{j=0}^{n} q^j + q^{n+1} & = S + q^{n+1} \end{cases}$$

donc

$$1 + qS = S + q^{n+1} \iff 1 - q^{n+1} = S - qS \iff 1 - q^{n+1} = (1-q)S \iff S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Dans l'exemple précédent, on a démontré :

Proposition 8

Si $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque.

Il faut parfois adapter la méthode de changement d'indice à d'autres situations. Par exemple :

- $$\sum_{k=2}^{n} a_k \underset{\boxed{\substack{j=k-2\\k=j+2}}}{=} \sum_{j=0}^{n-2} a_{j+2} \qquad \begin{pmatrix}\text{glissement}\\ \text{d'indice}\end{pmatrix}$$

  k va de 2 à n, donc $j = k-2$ va de 0 à $n-2$.

k	2	3	4	$\cdots$	$n-1$	n
$j=k-2$	0	1	2	$\cdots$	$n-3$	$n-2$

- $$\sum_{k=2}^{n} a_k \underset{\boxed{\substack{j=n-k\\k=n-j}}}{=} \sum_{j=0}^{n-2} a_{n-j} \qquad \begin{pmatrix}\text{inversion}\\ \text{d'indice}\end{pmatrix}$$

  k va de 2 à n, donc $j = n-k$ va de $n-2$ à $n-n=0$. Comme $n-2$ est plus grand que 0, on « retourne les bornes » : j va de 0 à $n-2$.

k	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
$j=n-k$	$n-2$	$n-3$	$\cdots$	$n-(n-1)=1$	$n-n=0$

Exercices

Exercices 21 à 29

On termine la leçon avec la notion de produit – que nous ne développerons pas :

Définition 4

Si $m \leq n$ sont deux entiers naturels et $a_m,\ a_{m+1}, \cdots,\ a_n$ sont des complexes, le nombre

$$\prod_{k=m}^{n} a_k$$

désigne le produit

$$a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n.$$

Exemples 10

1. $\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 \times 2^3 \times 2^4 = 2^{2+3+4} = 2^9 = 512.$
2. Si n est un entier naturel non nul, $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Ce nombre est noté $n!$, on le retrouvera dans la leçon sur le dénombrement.
3. On a aussi des produits télescopiques. Par exemple :

$$\prod_{k=0}^{3} \frac{k+2}{k+1} = \frac{0+2}{0+1} \times \frac{1+2}{1+1} \times \frac{2+2}{2+1} \times \frac{3+2}{3+1} = \frac{\cancel{2}}{1} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{5}{\cancel{4}} = \frac{5}{1} = 5.$$

III. Exercices

Exercice 1.
Dans chaque question, calculer les premiers termes des suites.

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n \times 5$.
3. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 1$.
4. $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n + n$.

Exercice 2.
Pour soigner son cancer de la thyroïde, un patient doit ingérer une unique gélule contenant 10 μg (microgrammes) d'iode 131. Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %. On note v_n la masse (en μg) d'iode 131 après n jours.

1. Déterminer v_0, v_1 et v_2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quelle est la masse d'iode 131 après 10 jours (arrondir à 0,1 μg près).
3. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

Exercice 3.
Une plaque en verre teinté atténue de 15 % l'intensité lumineuse d'un rayon qui la traverse.
On note v_n l'intensité lumineuse (mesurée en lumens) d'un rayon à la sortie si on superpose n plaques identiques ($n \geq 1$).
On suppose que l'intensité lumineuse à l'entrée de la première plaque est $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quel est le nombre minimal de plaques à superposer pour que l'intensité lumineuse soit divisée par 100 ?

Exercice 4.
Une suite v est définie par $v_0 = 4$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = 2v_n + 2$$

pour tout entier naturel n.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Prouver que v n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 5 (🏛).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 1.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - 0,5$ pour tout entier naturel n.
   Calculer v_0, v_1 et v_2.
3. Prouver que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4. Déduire de la question 3 l'expression de v_n en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

Exercice 6 (🏛).
Le 01/01/2020, on emprunte 10 000 € à la banque au taux d'intérêt mensuel de 2 %. À chaque fin de mois on rembourse 300 €.

On note u_n la somme à rembourser le 1er jour du n^{e} mois (en convenant que janvier 2020 est le mois 0, février 2020 le mois 1, etc.). On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose
   $$v_n = u_n - 15\,000.$$
   Prouver que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
4. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer la durée du crédit et calculer la somme totale remboursée.

Exercice 7 (🏛 🏅).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 8 (🏛 🏅).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = (n+2)^2.$$

Exercice 9 (🏛 🏅).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n \leq 6.$$

Exercice 10 (🏛 🏅).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 11 (🏅).

1. Vérifier que pour tout réel x :
$$x(2x+1) + 6(x+1) = (x+2)(2x+3).$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 12 (🏛 🏅).

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = 2^n + 3^n.$$

Exercice 13.

Écrire in extenso les sommes :

1. $\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$. 2. $\sum_{k=3}^{6}\frac{k+1}{k+2}$. 3. $\sum_{k=0}^{n}k^2$.

Exercice 14.

Écrire avec le symbole $\sum$:

1. $2+4+6+\cdots+98+100$.
2. $3+5+7+\cdots+99+101$.
3. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$.

Exercice 15.

1. Calculer $\sum_{k=4}^{10} 3$.
2. Généraliser : si $m \leq n$ sont des entiers et si λ est un nombre complexe,
$$\sum_{k=m}^{n}\lambda = \ldots$$

Exercice 16 (🏅).

Calculer la somme de tous les nombres apparaissant dans la table de multiplication des entiers de 1 à 10 :

$\times$	**1**	**2**	**3**	$\cdots$	**10**
1	1	2	3	$\cdots$	10
2	2	4	6	$\cdots$	20
3	3	6	9	$\cdots$	30
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	10	20	30	$\cdots$	100

Exercice 17.

Soient λ, a_m, $a_{m+1}, \cdots, a_n$, b_m, $b_{m+1}, \cdots, b_n$ des nombres complexes. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. $\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n}a_k + \sum_{k=m}^{n}b_k$.
2. $\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k = \lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$.
3. $\sum_{k=m}^{n}(a_k \times b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right)$.

Dans l'exercice suivant, on pourra librement utiliser la formule (voir exercice 11) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 18 (🏛).
Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 19 (🏛).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)(n+3).$$

Exercice 20 (🏛).
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2.$$

2. En développant le membre de droite, retrouver la formule pour $\sum\limits_{k=0}^{n} k$.

Exercice 21.
Calculer :

1. $S_1 = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^8$.
2. $S_2 = 1 + 0,5 + 0,5^2 + \cdots + 0,5^{10}$.
3. $S_3 = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots - 2^{19} + 2^{20}$.
4. $S_4 = 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^8$.

Exercice 22 (🏛 🏅).

1. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

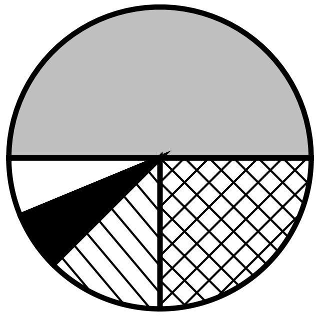
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 23 (🏛 🏅).

1. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
Interpréter géométriquement en vous inspirant de la figure ci-dessous.



Exercice 24 (🏛 🏅).

1. Déterminer deux réels a, b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{k} - \frac{b}{k+2} = \frac{2}{k+2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un télescopage, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2}{k+2}$.

Exercice 25 (🏛).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 26 (🏛 🏅).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement d'indice, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$.

Exercice 27 (🏛).

1. Rappeler la formule pour les racines 5-ièmes de l'unité. Prouver que leur somme est nulle.
2. Généraliser aux racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 28.

1. Soient $A_1, \dots, A_n$ n points du plan, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels dont la somme $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est non nulle. Rappeler la définition du barycentre G du système $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$.
2. Réécrire la relation de la question 1 avec le symbole $\sum$.

Exercice 29 ().

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Prouver que
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$
Factoriser de même $a^4 - b^4$.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} b^{k-1} a^{n-k}.$$