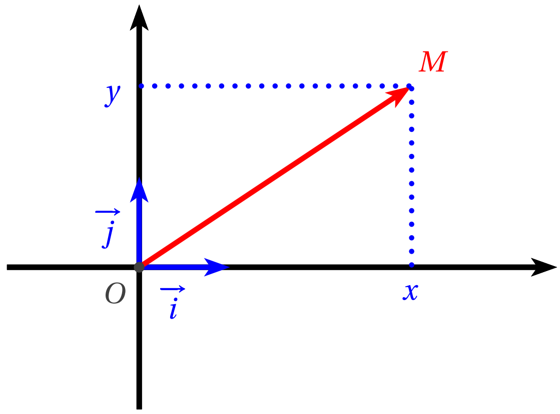
Chapitre 6 : Géométrie du plan

Dans toute la leçon, on se donne un repère orthonormé direct (r.o.n.d.) $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Cela signifie que $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$[1] et que l'on amène $\vec{i}$ sur $\vec{j}$ en tournant de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct.

Dans ce cas, pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Le couple (x, y) sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



I. Produit scalaire

On rappelle dans cette section ce qui a été vu en classe de 1re.

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini de la façon suivante : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon.

Proposition 1 (symétrie et bilinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tous réels λ, μ :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. $\vec{u} \cdot \left(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}\right) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w}$.
3. $\left(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \lambda\vec{u} \cdot \vec{w} + \mu\vec{v} \cdot \vec{w}$.

La nullité du produit scalaire caractérise l'orthogonalité :

Théorème 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Proposition 2

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

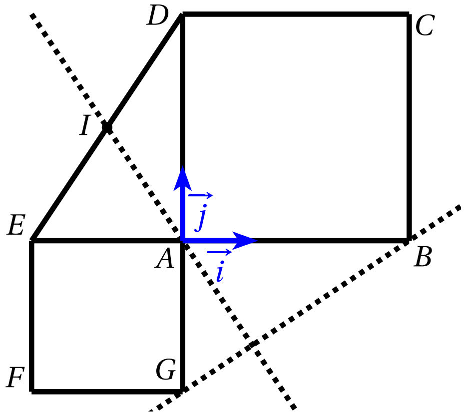
Remarque.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

1. On rappelle que $\|\vec{u}\|$ désigne la norme, ou longueur, du vecteur $\vec{u}$.

Exemple 1

$ABCD$ est un carré de côté 3, $AEFG$ est un carré de côté 2, avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-dessous. Le point I est le milieu du segment $[DE]$.



On souhaite prouver que (AI) est orthogonale à (GB).

On utilise un r.o.n.d. $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, dans lequel $A(0;0)$, $B(3;0)$, $G(0;-2)$, $E(-2;0)$ et $D(0;3)$.

I est le milieu de $[ED]$, donc $I\left(\frac{-2+0}{2}; \frac{0+3}{2}\right)$ $I(-1;1,5)$.

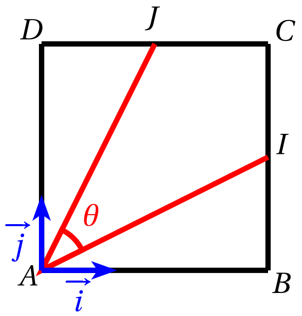
On a donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\1,5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, puis

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{GB} = -1 \times 3 + 1,5 \times 2 = 0.$$

On en déduit que (AI) est orthogonale à (GB).

Exemple 2

$ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu du segment $[BC]$ et J celui de $[CD]$.



On calcule une mesure à 1° près de l'angle $\widehat{IAJ}$, que l'on note θ.

On utilise un r.o.n.d. $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, dans lequel $A(0;0)$, $I(4;2)$, $J(2;4)$. On a donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

On calcule les longueurs grâce au théorème de Pythagore :

$$AI = AJ = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20},$$

puis le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 16.$$

Par définition du produit scalaire

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \left\|\overrightarrow{AI}\right\| \left\|\overrightarrow{AJ}\right\| \cos\theta$$
$$16 = \sqrt{20} \times \sqrt{20} \cos\theta$$

On en déduit

$$\cos\theta = \frac{16}{20} = 0,8 \qquad \theta = \arccos(0,8) \approx 37°.$$

Remarque (à lire après le chapitre 8 !).
La fonction arccos est à valeurs dans $[0;\pi]$, donc il n'y a aucun risque à utiliser arccos pour la mesure des angles géométriques (entre 0° et 180°). En revanche, arcsin peut poser problème : si on sait par exemple que $\sin\alpha = 0,5$, alors α peut valoir 30° ou 150°.

Exercices

Exercices 1 à 8

II. Déterminant

Définition 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$, est défini de la façon suivante : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ sinon.

Le déterminant peut être calculé avec les coordonnées et, au signe près, il s'interprète comme l'aire d'un parallélogramme :

Proposition 3

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

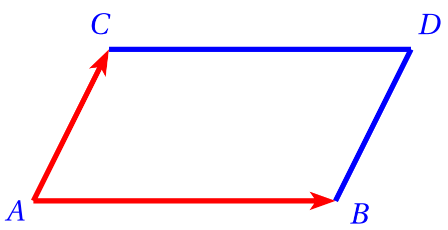
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y.$$

Ce nombre est noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

La proposition ci-dessous est démontrée en exercice :

Proposition 4

Soient A, B, C trois points du plan, et soit D le point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati). Alors $\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$ est l'aire du parallélogramme $ABDC$.



Exercices

Exercices 9 et 10

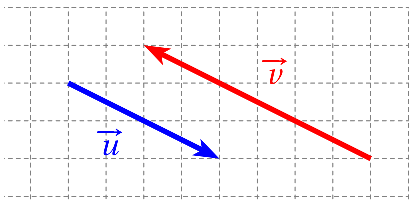
Proposition 5 (antisymétrie et bilinéarité)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, pour tous réels λ, μ :

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.
2. $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu\det(\vec{u}, \vec{w})$.
3. $\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu\det(\vec{v}, \vec{w})$.

Définition 3

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un nombre réel k tel $\vec{v} = k\vec{u}$.



Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

La nullité du déterminant caractérise la colinéarité :

Théorème 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

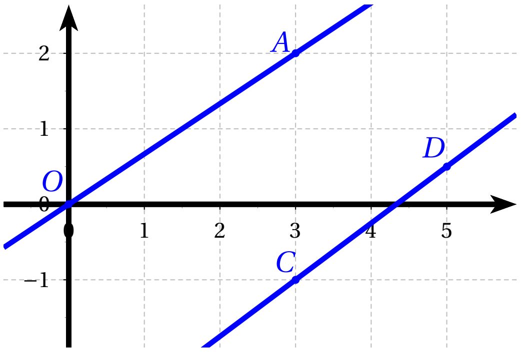
On rappelle l'utilisation de la colinéarité en géométrie élémentaire :

Proposition 6

1. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple 3

Soient $O(0;0)$, $A(3;2)$, $C(3;-1)$ et $D(5;0,5)$. Les droites (OA) et (CD) sont-elles parallèles ?



On utilise le déterminant : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1,5\end{pmatrix}$ donc

$$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 1,5\end{vmatrix} = 3\times 1,5 - 2\times 2 = 0,5.$$

Conclusion : comme le déterminant est non nul, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires ; et donc (OA) et (CD) ne sont pas parallèles.

Exercices

Exercice 11

Pour conclure cette section, on introduit le vocabulaire de l'algèbre linéaire (étudiée au 2e semestre).

Définition 4

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits linéairement dépendants s'il existe un couple de réels $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tels que

$$\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}.$$

Dans le cas contraire, ils sont dits linéairement indépendants.

On démontre en exercice la propriété ci-dessous :

Proposition 7

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants si, et seulement si, ils sont colinéaires.

Remarques.

- Le fait que $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ signifie que λ et μ ne peuvent être nuls **tous les deux**. Mais l'un d'eux peut être nul.
- Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, on dit que la famille $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ est liée ; sinon on dit qu'elle est libre.

Exercices

Exercice 12

III. Barycentre

On commence par le barycentre de deux points :

Déf.5 Soient A, B deux points du plan, α, β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$. Il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$. On dit que le point G est le barycentre du système $(A,\alpha),(B,\beta)$. On note $G=\text{bary}A_\alpha B_\beta$.

Proposition 8

Soient A, B deux points du plan, α, β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$. Alors $G=\text{bary}A_\alpha B_\beta$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

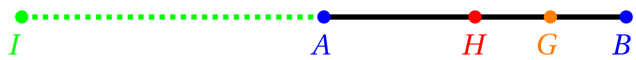
Démonstration (de la proposition 8)

$$\begin{aligned}
G=\text{bary}A_\alpha B_\beta &\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\
&\iff \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0}\\
&\iff (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
&\iff \beta\overrightarrow{AB}=-(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}\\
&\iff \beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}\\
&\iff \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

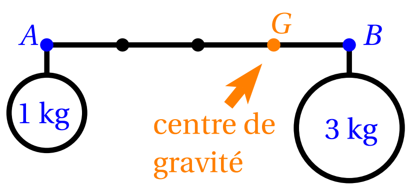
Exemple 4

Soient A, B deux points du plan. On construit $G=\text{bary}A_1B_3$, $H=\text{bary}A_1B_1$, $I=\text{bary}A_2B_{-1}$:

- $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{1+3}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, donc G est aux trois-quarts du segment $[AB]$ en partant de A.
- $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{1+1}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, donc H est le milieu du segment $[AB]$.
- $\overrightarrow{AI}=\frac{-1}{2+(-1)}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}$, donc I est le symétrique de B par rapport à A.



On interprète le barycentre comme un centre de gravité, avec deux poids α et β aux points A et B [a] : le point H est le milieu de $[AB]$, car les poids sont égaux; et pour G, il faut se référer à la figure ci-dessous :



a. *bary* vient du grec *barús* (« lourd »).

Remarques.

- Si $G=\text{bary}A_\alpha B_\beta$, alors $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc A, B, G sont alignés.
- On ne change pas le barycentre si on multiplie les masses α, β par un réel non nul (cela revient seulement à « changer l'unité de mesure de la masse »). Par exemple : $G=\text{bary}A_1B_3=\text{bary}A_{2\times1}B_{2\times3}=\text{bary}A_2B_6$.

Proposition 9

Si $G = \text{bary} A_\alpha B_\beta$, alors le point G a pour coordonnées :

$$\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right).$$

Démonstration

On pourrait travailler avec les vecteurs et leurs coordonnées, mais il est plus agréable de travailler dans le plan complexe : la relation $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$ se traduit par l'égalité

$$\alpha\left(z_A - z_G\right) + \beta\left(z_B - z_G\right) = 0.$$

On développe et on isole z_G :

$$\alpha z_A - \alpha z_G + \beta z_B - \beta z_G = 0 \iff \alpha z_A + \beta z_B = (\alpha+\beta) z_G \iff z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}.$$

Il ne reste plus qu'à écrire $z_A = x_A + \mathrm{i} y_A$, $z_B = x_B + \mathrm{i} y_B$ et à séparer partie réelle et partie imaginaire pure pour pouvoir conclure.

On définit de la même façon le barycentre de trois points :

Déf.6

Soient A, B, C trois points du plan, α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. On dit que le point G est le barycentre du système $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$. On note $G = \text{bary} A_\alpha B_\beta C_\gamma$.

Proposition 10

Soient A, B, C trois points du plan, α, β, γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = \text{bary} A_\alpha B_\beta C_\gamma$. Alors :

1. $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$.
2. Les coordonnées de G sont :

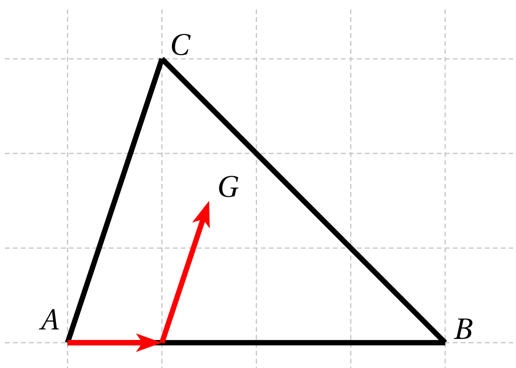
$$\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

Exemple 5

ABC est un triangle. On construit $G = \text{bary} A_1 B_1 C_2$.

$\alpha+\beta+\gamma = 1+1+2 = 4$, donc

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}.$$



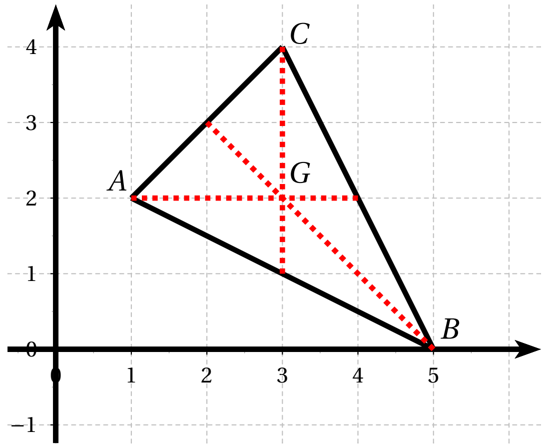
Exemple 6

Soient $A(1;2)$, $B(5;0)$ et $C(3;4)$ dans un r.o.n.d. du plan. Les coordonnées de $G = \text{bary}A_1B_1C_1$ sont

$$\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$
$$\left(\frac{1\times1+1\times5+1\times3}{1+1+1};\frac{1\times2+1\times0+1\times4}{1+1+1}\right)$$

Conclusion : $G(3;2)$.

On remarque que G est sur chacune des médianes : c'est le centre de gravité du triangle (voir exercices).



Pour terminer cette section, on généralise avec le barycentre de n points :

Déf.7

Soient $A_1,\dots,A_n$ n points du plan, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ n réels dont la somme $\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ est non nulle. Il existe un unique point G tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}.$$

On dit que le point G est le barycentre du système $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$.

Proposition 11

Si G est le barycentre du système $(A_1,\alpha_1),\dots,(A_n,\alpha_n)$, alors

$$G\left(\frac{\alpha_1x_{A_1}+\cdots\alpha_nx_{A_n}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n};\frac{\alpha_1y_{A_1}+\cdots\alpha_ny_{A_n}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\right).$$

Déf.8

Lorsque $\alpha_1=\cdots=\alpha_n$, le point G est appelé isobarycentre du système.

Remarques.

- L'isobarycentre de deux points A, B est le milieu de $[AB]$.
- L'isobarycentre de trois points A, B, C est le centre de gravité du triangle ABC.

Exercices

Exercices 13 à 19

IV. Droites

Proposition 12 (équation cartésienne de droite)

- Toute droite Δ a une équation, dite cartésienne, de la forme

$$ax + by + c = 0,$$

  où a, b, c sont trois nombres réels et $(a, b) \neq (0, 0)$.
- Réciproquement, si a, b, c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que

$$ax + by + c = 0$$

  est une droite Δ.

Exemple 7

Sur la figure ci-contre on a tracé les droites :

- $D_1 : y = 2x + 1$.
- $D_2 : x = -3$.

Tableau pour le tracé de D_1 :

x	0	2
y	1	5

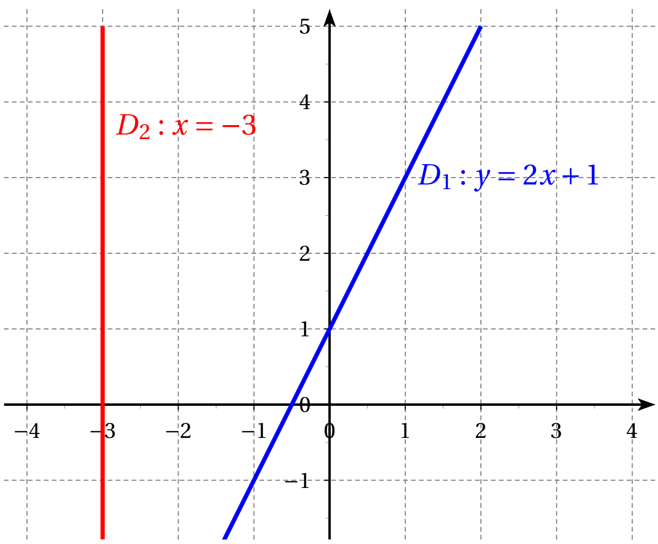
Calculs correspondants :

$2 \times 0 + 1 = 1$

$2 \times 2 + 1 = 5$

Les deux équations sont écrites « sous forme réduite ». En transposant, on peut écrire :

- $D_1 : -2x + 1y - 1 = 0$.
- $D_2 : 1x + 0y + 3 = 0$.



Exercices

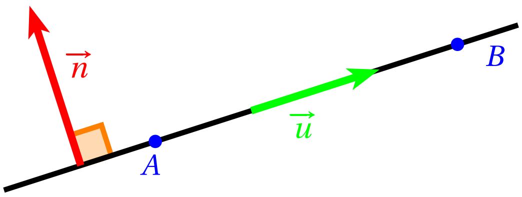
Exercices 20 et 21

Remarque.
Il y a un petit abus lorsqu'on parle de l'équation cartésienne, car elle n'est pas unique. Par exemple, l'équation $\Delta : 6x - 9y + 12 = 0$ peut se réécrire $\Delta : 2x - 3y + 4 = 0$ en divisant les deux membres par 3. On aura d'ailleurs intérêt dans les exercices à faire ce type de simplification pour éviter des calculs trop compliqués.

Définition 9

Soient A, B deux points distincts du plan et soient $\vec{n}$, $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls. On dit que :

- $\vec{n}$ est normal (ou orthogonal) à (AB) si $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.
- $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (AB) si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



Théorème 3

Soient A, B deux points distincts du plan et soient a, b deux nombres réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— Il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que (AB) ait une équation de la forme $ax+by+c=0$;

— $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB) ;

— $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à (AB).

Exemple 8

Soient $A(-1;-1)$ et $B(2;3)$. On note Δ la perpendiculaire à (AB) passant par $C(-1;2)$. On va déterminer l'équation cartésienne des droites (AB) et Δ.

On cherche d'abord l'équation de (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}-b\\a\end{matrix}$ est (bien sûr!) un vecteur directeur de (AB), donc d'après le théorème 3, (AB) a une équation de la forme

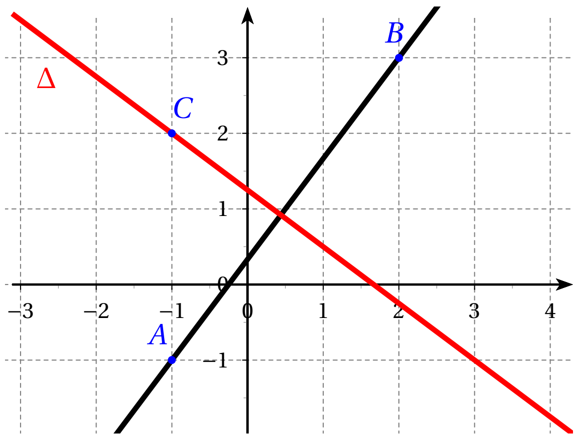
$$4x-3y+c=0.^{a}$$

$A(-1;-1)\in(AB)$, donc $4\times(-1)-3\times(-1)+c=0$, soit $-1+c=0$ et finalement $c=1$.
Conclusion : $(AB):4x-3y+1=0$.

On cherche ensuite l'équation de Δ.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{matrix}a\\b\end{matrix}$ est (bien sûr!) un vecteur normal à Δ, donc d'après le théorème 3, Δ a une équation de la forme

$$3x+4y+c=0.$$

$C(-1;2)\in\Delta$, donc $3\times(-1)+4\times2+c=0$, ce qui donne $c=-5$.
Conclusion : $\Delta:3x+4y-5=0$.



a. $-b=3$, donc $b=-3$.

Remarque.
Pour déterminer le point d'intersection des droites (AB) et Δ, on peut :

- soit résoudre le système $\begin{cases}4x-3y+1=0\\3x+4y-5=0\end{cases}$;
- soit utiliser la représentation paramétrique de Δ (voir ci-dessous).

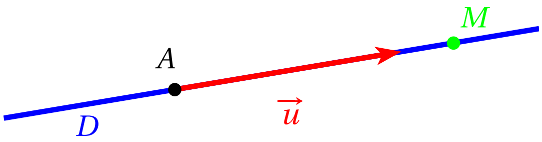
Les deux techniques seront étudiées en exercice.

Exercices

Exercices 22 à 24

On conclut cette section avec les représentations paramétriques de droites.

Soit D une droite passant par un point A et dirigée par un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Un point $M(x;y)$ appartient à la droite D si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ; donc si, et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.



Cette égalité se réécrit

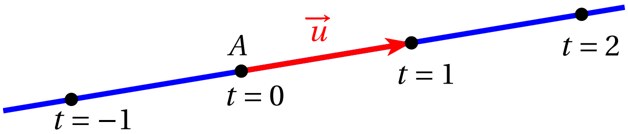
$$\begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},$$

soit après développement et transposition :

$$\begin{cases} x &= x_A + t\alpha \\ y &= y_A + t\beta \end{cases}. \qquad (1)$$

Définition 10

Dans la situation qui précède, on dit que (1) est la représentation paramétrique de la droite D. Cela signifie que les points $M(x;y)$ qui appartiennent à D sont ceux qui vérifient (1) pour une certaine valeur de t.



Exemple 9

On considère les points $A(4;2)$ et $B(0;3)$. Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x &= x_A + t\times(-4) \\ y &= y_A + t\times 1 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} x &= 4-4t \\ y &= 2+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Lorsqu'on prend $t=0$, on obtient $\begin{cases} x &= 4-4\times 0 = 4 \\ y &= 2+0=2 \end{cases}$. Il s'agit bien sûr du point A. Et si on prend $t=1$, on obtient $\begin{cases} x &= 4-4\times 1 = 0 \\ y &= 2+1=3 \end{cases}$. Cette fois, il s'agit du point B. C'est là aussi une évidence : nous sommes partis de A et avons ajouté 1 fois le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Enfin, si $t = 0,5$, on vérifie sans peine que le point obtenu est le milieu du segment $[AB]$.

Demandons-nous à présent si le point $K(8;1)$ appartient, ou non, à la droite (AB). Pour répondre, il suffit de savoir s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 8 &= 4-4t \\ 1 &= 2+t \end{cases}.$$

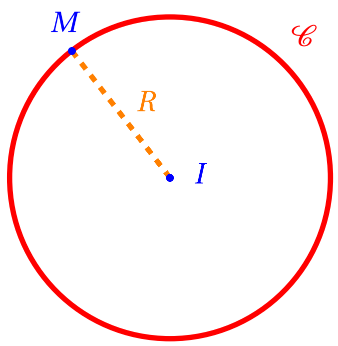
Il est (assez) clair que $t=-1$ convient, donc $K\in D$. On peut même dire (puisque $t=-1$) que K est le symétrique de B par rapport à A (cf la figure qui précède cet exemple).

Exercices

Exercices 25 et 26

V. Cercles

Considérons un cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_I ; y_I)$ et de rayon R. Un point $M(x; y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si, et seulement si, la longueur IM vaut R.



Avec la formule pour la longueur d'un segment, l'égalité $IM = R$ se réécrit :

$$\sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} = R.$$

On élève au carré :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2.$$

Autrement dit, on vient de démontrer :

Théorème 4 (équation de cercle)

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(x_I ; y_I)$ et de rayon R a pour équation

$$\mathscr{C} : (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = R^2.$$

Exemple 10

Le cercle de centre $D(2; -1)$ de rayon 3 a pour équation

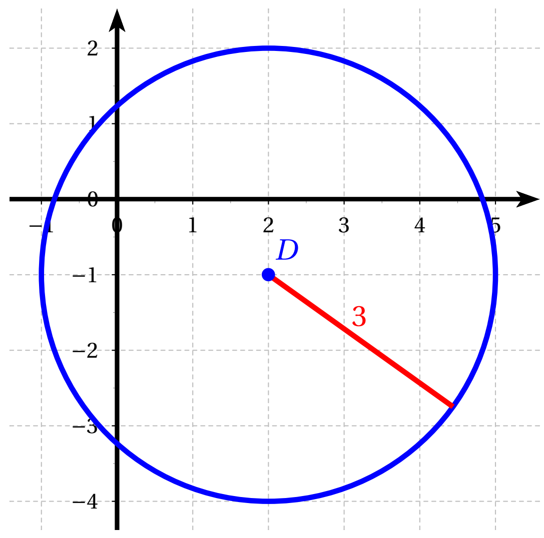
$$(x - x_D)^2 + (y - y_D)^2 = R^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 3^2$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Remarque.
Si on le souhaite on peut développer :

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9,$$

puis transposer et réduire

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0.$$



Exercices
Exercice 27

Pour trouver le centre et le rayon d'un cercle dont l'équation est donnée sous forme développée, on a besoin d'écrire des expressions du second degré sous une forme particulière, appelée forme canonique. Étant donnés deux réels b, c, il s'agit de trouver deux autres réels α, β tels que

$$x^2 + bx + c = (x + \alpha)^2 + \beta.$$

Expliquons comment trouver α et β avec deux exemples :

Exemples 11

1. On écrit x^2-6x+5 sous forme canonique. Pour cela, on reconnaît le début d'une identité remarquable que l'on « compense » : dans x^2-6x, on reconnaît le début de l'identité remarquable
$$(x-3)^2 = x^2-2\times x\times 3+3^2 = x^2-6x+9.$$
On écrit alors :
$$x^2-6x+5 = \left(x^2-6x+9\right)-4 = (x-3)^2-4.$$
L'expression de droite est l'écriture sous forme canonique. Avec les notations ci-dessus, $\alpha=-3$ et $\beta=-4$.
2. On écrit x^2+x-1 sous forme canonique. Dans x^2+x, on reconnaît le début de l'identité remarquable
$$(x+0,5)^2 = x^2+2\times x\times 0,5+0,5^2 = x^2+x+0,25.$$
On écrit alors :
$$x^2+x-1 = \left(x^2+x+0,25\right)-1,25 = (x+0,5)^2-1,25.$$

Exercices

Exercice 28

Retournons aux équations de cercles :

Exemple 12

On prouve que $x^2+6x+y^2-2y+5=0$ est l'équation d'un cercle et on détermine son centre I et son rayon R.

Pour cela on écrit x^2+6x et y^2-2y sous forme canonique :
$$x^2+6x = (x^2+6x+9)-9 = (x+3)^2-9 \qquad , \qquad y^2-2y = (y^2-2y+1)-1 = (y-1)^2-1.$$
Donc l'égalité $\underbrace{x^2+6x}_{(x+3)^2-9}+\underbrace{y^2-2y}_{(y-1)^2-1}+5=0$ est équivalente à $(x+3)^2-9+(y-1)^2-1+5=0$, soit $(x+3)^2+(y-1)^2=5$, soit enfin
$$(x-(-3))^2+(y-1)^2 = \sqrt{5}^2.$$
Il s'agit bien de l'équation d'un cercle, de centre $I(-3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$.

Attention

Compte tenu du théorème 4, il faut faire apparaître des « $-$ » pour avoir les coordonnées du centre, et un carré pour avoir le rayon :
$$(x-(-3))^2+(y-1)^2 = \sqrt{5}^2$$
$$(x-x_I)^2 \ +(y-y_I)^2 = R^2$$

Exercices

Exercice 29

Remarque.

On peut démontrer que, de façon générale, $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

Cette écriture permet :

- De montrer que le sommet de la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ est le point de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ – on peut aussi démontrer ce résultat avec la dérivation.
- D'obtenir les formules pour les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$. On réécrit cette équation $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, puis on distingue les trois cas habituels : $\Delta>0$, $\Delta=0$ et $\Delta<0$. La même technique fonctionne dans $\mathbb{C}$, pour l'équation $az^2+bz+c=0$.
- D'obtenir la factorisation de ax^2+bx+c.

Pour conclure la leçon, on s'intéresse à la représentation paramétrique d'un cercle $\mathscr{C}$, de centre I et de rayon r. On travaille avec les affixes : un point M d'affixe z est sur $\mathscr{C}$ si, et seulement si, $IM = r$; ce qui se réécrit $|z-z_I| = r$. Or les points du plan complexe de module r sont les $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta\in\mathbb{R}$ (ou $\theta\in[0;2\pi[$, si l'on ne veut parcourir le cercle qu'une fois).

Conclusion :

$$M\in\mathscr{C} \iff IM=r \iff |z-z_I|=r \iff z-z_I = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z = z_I + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

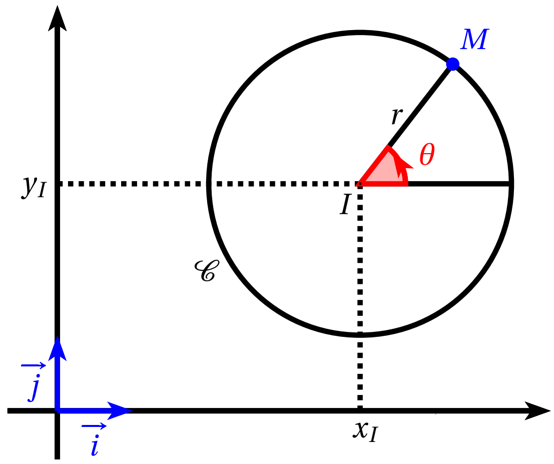
Proposition 13

Le cercle $\mathscr{C}$, de centre I et de rayon r, a pour représentation paramétrique

$$z = z_I + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta\in\mathbb{R}.$$

Ou encore, avec les coordonnées cartésiennes :

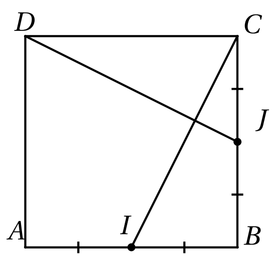
$$\begin{cases} x &= x_I + r\cos\theta \\ y &= y_I + r\sin\theta \end{cases},\ \theta\in\mathbb{R}.$$



VI. Exercices

Exercice 1 (🏛).
Soient $A(0;-4)$, $B(3;0,5)$, $C(-2;2)$ et $D(1;0)$.
Prouver que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 2 (🏛).
$ABCD$ est un carré de côté 4, I est le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$.
Démontrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.



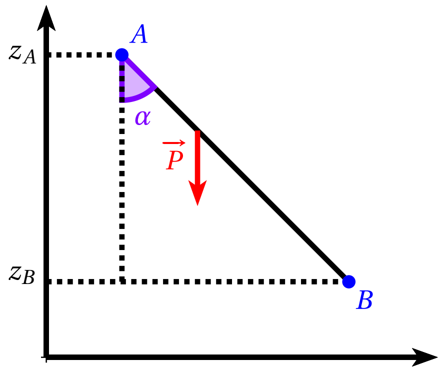
Exercice 3 (🏛).
Les questions 1 à 3 sont indépendantes.

1. Soient $A(0;-1)$, $B(6;3)$ et $C(2;4)$. Calculer $\widehat{BAC}$ à 1° près.
2. $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
   En développant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right)$, prouver que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -10$.
3. ABC est isocèle en C et $AB = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 4.
Soit $\overrightarrow{F}$ une force appliquée sur un point matériel M le long d'un chemin $\overrightarrow{AB}$.

1. Quel est le travail W de la force sur le déplacement $\overrightarrow{AB}$?
2. On suppose $AB = 10$ m, $\left\|\overrightarrow{F}\right\| = 20$ N et $W = 1,6.10^2$ J. Déterminer une valeur approchée de θ à 1° près.

Exercice 5.
Quel est le travail du poids d'une personne de 80 kg qui se déplace de A vers B dans le champ de pesanteur terrestre ?
Données numériques : $g = 9,81$, $z_A - z_B = 100$ m.



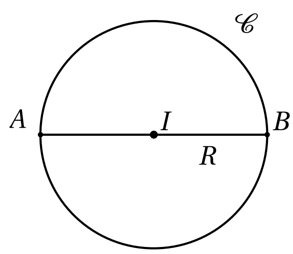
Exercice 6 (🏛 🏅).
On se propose de démontrer la propriété bien connue :

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

1. Construire un triangle ABC, puis H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C.
2. Justifier l'égalité :
   $$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0.$$
   Indication : Écrire $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}$, développer, puis simplifier.
3. En déduire que (HA) est la hauteur issue de A.

Exercice 7 (🏛 🏅).

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre I, de rayon R et de diamètre $[AB]$.



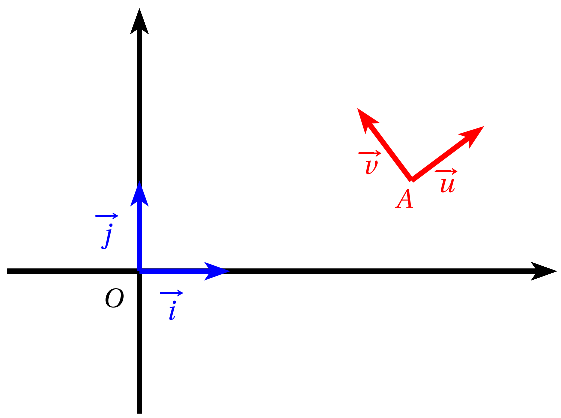
1. Soit M un point du plan. En remarquant que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, démontrer que
   $$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - R^2.$$
2. En déduire l'équivalence :
   $$M \in \mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Exercice 8 (🏅).
Dans tout l'exercice, on munit le plan de son r.o.n.d. habituel $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. **a.** Soient $A(3;2)$ et $M(5;-1)$. Quelles sont les coordonnées de M dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$?

   b. On généralise : soient $A\left(x_A; y_A\right)$ et $M\left(x_M; y_M\right)$. Quelles sont les coordonnées de M dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$?

2. On se donne à présent un nouveau r.o.n.d. $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$.



Prouver que pour tout vecteur $\vec{w}$:

$$\vec{w} = \left(\vec{w} \cdot \vec{u}\right)\vec{u} + \left(\vec{w} \cdot \vec{v}\right)\vec{v}$$

Exercice 9 (démonstration du cours).
Soit $ABDC$ un parallélogramme et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On note $\theta = \widehat{BAC}$.

1. Faire une figure et exprimer la longueur CH en fonction de l'angle θ et de la longueur AC.
2. En déduire que l'aire de $ABDC$ est égale à $\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|$.
3. **Étude d'un exemple.** Calculer l'aire du triangle ABC, où $A(1;1)$, $B(3;0)$, $C(4;3)$.

Exercice 10.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Interpréter géométriquement.
2. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{w}$. Interpréter géométriquement.

Exercice 11 (🏛).
Soient $O(0;0)$, $A(3;2)$, $B(4,5\ ;3)$, $C(3;-2,5)$ et $D(7;-1,5)$.

1. Les points O, A, B sont-ils alignés ?
2. Les droites (OC) et (AD) sont-elles parallèles ?

Exercice 12 (🏅– démonstration du cours).
Démontrer la proposition 7 : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants si, et seulement si, ils sont colinéaires.

Exercice 13 (🏛).
Construire un segment $[AB]$ et placer les points $G = \text{bary}A_3B_2$, $I = \text{bary}A_2B_2$, $K = \text{bary}A_{-1}B_3$.

Exercice 14 (🏛).
Soient $A(-2;1)$, $B(2;3)$ et $C(4;0)$.

1. Calculer les coordonnées de $G = \text{bary}A_1B_3C_4$ et faire une figure.
2. Soit $I = \text{bary}A_1B_3$. Calculer les coordonnées de I et vérifier que G est le milieu du segment $[IC]$.

Exercice 15 (🏛).
Tracer un triangle quelconque ABC, puis construire $G = \text{bary}A_2B_1C_1$.

Exercice 16 (🏛).
GAB est un triangle, I est le milieu du segment $[AB]$. Prouver que

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$$

de deux façons différentes :

- en utilisant la relation de Chasles et le calcul vectoriel ;
- en utilisant les affixes des vecteurs.

Exercice 17 (🏛).
ABC est un triangle, I est le milieu du segment $[AB]$ et G est l'isobarycentre de A, B, C.

1. Rappeler la définition de G.
2. En utilisant l'exercice 16, prouver que $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3. Compléter les pointillés $G = \text{bary}I_{...}C_{...}$, puis construire G.

Exercice 18 (🏛).
ABC est un triangle, I est le milieu du segment $[AB]$ et $G = \text{bary} A_1 B_1 C_2$.

1. Rappeler la définition de G.
2. En utilisant l'exercice 16, prouver que $G = \text{bary} I_2 C_2$. Construire G.

Exercice 19 (🏅).
En utilisant les idées des exercices précédents, donner la méthode de construction de l'isobarycentre G de quatre points A, B, C, D.

Exercice 20.
1. Écrire les équations sous forme cartésienne :
$$D : y = 2x - 4, \qquad D' : x = 3.$$
2. Écrire les équations sous forme réduite :
$$\Delta : -5x + y + 3 = 0, \qquad \Delta' : 3x + 4y = 0.$$

Exercice 21.
1. Tracer les droites $D_1 : 3x + 2y - 5 = 0$ et $D_2 : -x + y + 3 = 0$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2.

Exercice 22 (🏛).
Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $A(-1;0)$, $B(2;4)$ et $C(5;-1)$. Déterminer l'équation cartésienne de (BC), puis de la perpendiculaire Δ à (BC) passant par A.
2. Soient $A(0;-2)$ et $B(4;3)$. Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

Exercice 23 (🏛).
Tracer les droites $\Delta : 3x - 2y + 3 = 0$ et $\Delta' : 4x + 6y + 12 = 0$. Ces droites sont-elles orthogonales ?

Exercice 24 (🏛).
On considère dans un repère de centre O les points $A(8;0)$ et $B(0;6)$, le milieu I de $[AB]$ et le projeté orthogonal H de O sur (AB).

1. Faire une figure.
2. a. Déterminer les équations cartésiennes de (AB) et (OH).
   b. En déduire les coordonnées de H.
3. Le point H se projette orthogonalement en E sur l'axe des abscisses et en F sur l'axe des ordonnées.
   Démontrer que les droites (OI) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 25 (🏛).
1. On considère les points $A(2;-1)$ et $B(1;1)$.
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Le point $K(0;3)$ appartient-il à (AB) ?
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant $C(2;3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$.
3. Les droites (D) et (AB) sont-elles parallèles ? Sont-elles orthogonales ?

Exercice 26 (🏛).
Soient $D : 2x - y - 1 = 0$ et $C(-1;3)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la perpendiculaire Δ à D passant par C.
3. Le point C se projette orthogonalement en H sur D. Construire H et calculer ses coordonnées.
4. Calculer la distance du point C à la droite D.

Exercice 27 (🏛).
On fera une figure.

1. Déterminer l'équation des cercles :
   a. $\mathscr{C}_1$ de centre $I(-2;3)$ de rayon 3.
   b. $\mathscr{C}_2$ de centre $J(1;-1)$ passant par $A(3;1)$.
   c. $\mathscr{C}_3$ de diamètre $[BC]$, où $B(2;2)$ et $C(6;0)$.
2. Le point $G(-3,5\ ;\ 0,5)$ appartient-il au cercle $\mathscr{C}_1$?
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}_3$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 28 (🏛).
Mettre chacune des expressions suivantes sous forme canonique :

1. $x^2 + 4x + 10$.
2. $x^2 - 8x + 9$.
3. $x^2 + 5x + 10$.
4. $y^2 - 3y + 1$.

Exercice 29 (🏛).

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}$: $x^2 - 4x + y^2 + y - 2 = 0$.
2. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathscr{C}'$: $x^2 + 3x + y^2 - 6y - 1 = 0$.