Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions

I. Opérations sur les fonctions

Définition 1

Une fonction f définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ associe, à tout élément x de E, un unique élément $f(x)$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x).$$

La représentation graphique de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$, avec $x \in E$.

Remarques.

- L'ensemble de définition E est parfois noté D_f.
- Lorsqu'un énoncé donne une formule pour f mais omet de donner E, on le prend le plus large possible. Par exemple : si $f(x) = \frac{1}{x}$, alors l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Définition 2

Soient $u : E \to \mathbb{R}$, $v : E' \to \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}$. On note $I = E \cap E'$.

- Le produit de k par u est la fonction
$$ku : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto k \times u(x).$$
- La somme de u et v est la fonction
$$u + v : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) + v(x).$$
- La différence de u et v est la fonction
$$u - v : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) - v(x).$$
- Le produit de u et v est la fonction
$$uv : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) \times v(x).$$
- Le quotient de u par v est la fonction
$$\frac{u}{v} : I \setminus A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)},$$
où A est l'ensemble des réels pour lesquels v s'annule : $A = \left\{x \in E' \mid v(x) = 0\right\}$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, u^n est la fonction
$$u^n : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto (u(x))^n.$$

Exemple 1

Soient $u : x \mapsto x - 4$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors :

- u est définie sur $\mathbb{R}$.
- v est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$.
- $f = u \times v$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = (x-4)\sqrt{x}.$$
- $g = \frac{2u}{v}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \frac{2(x-4)}{\sqrt{x}}.$$

Définition 3

Soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ deux fonctions. La composée de u par v, notée $v \circ u$, est définie par

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

pour tout $x \in E$.

$$\underset{\in E}{x} \xrightarrow[u]{} \underset{\in F}{u(x)} \xrightarrow[v]{} \underset{\in G}{v(u(x))} \qquad \left(x \xrightarrow{v\circ u} v(u(x))\right)$$

Exemple 2

Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x+1$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$. On pose $f = v \circ u$. Alors

$$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x+1) = (2x+1)^3$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$x \xrightarrow[u]{} 2x+1 \xrightarrow[v]{} (2x+1)^3 \qquad \left(x \xrightarrow{v\circ u} (2x+1)^3\right)$$

Attention

On calcule $u \circ v(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u \circ v(x) = u(v(x)) = u\left(x^3\right) = 2x^3 + 1.$$

$$x \xrightarrow[v]{} x^3 \xrightarrow[u]{} 2x^3+1 \qquad \left(x \xrightarrow{u\circ v} 2x^3+1\right)$$

Les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ sont donc deux fonctions différentes :

$$v \circ u(x) = (2x+1)^3 \qquad , \qquad u \circ v(x) = 2x^3 + 1.$$

Exemple 3

On pose $f(x) = \ln(x-1)$. La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$, donc f est définie sur $]1;+\infty[$. On peut écrire $f = \ln \circ u$, avec

- $u :]1;+\infty[\to]0;+\infty[,\ x \mapsto x-1$; (⚠ il faut prendre $x > 1$ pour avoir $x - 1 > 0$)
- $\ln :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x$.

$$\underset{\in]1;+\infty[}{x} \xrightarrow[u]{} \underset{\in]0;+\infty[}{x-1} \xrightarrow[\ln]{} \underset{\in \mathbb{R}}{\ln(x-1)} \qquad \left(x \xrightarrow{f = \ln\circ u} \ln(x-1)\right)$$

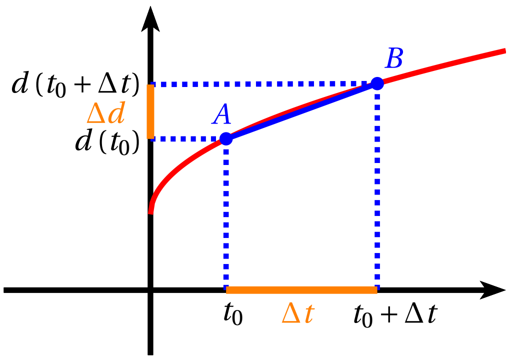
Exercices

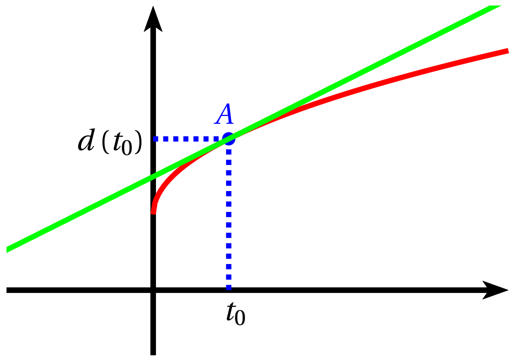
Exercices 1 et 2

II. Dérivation et variations

On commence par un rappel sur le nombre dérivé, avec les notations d'un cours de physique.

Exemple 4 (nombre dérivé)





- $d(t)$ = distance parcourue au tps t
- $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ = vitesse moyenne entre t_0 et $t_0+\Delta t$
- $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ = coefficient directeur de la corde (AB)

- $\mathbf{d'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}}$ =**nombre dérivé en $\mathbf{t_0}$**
- $d'(t_0)$ = vitesse instantanée au temps t_0
- $d'(t_0)$ = coefficient directeur tangente au point A

$d(t)$ donne la distance parcourue par une voiture au temps t. La vitesse moyenne entre les temps t_0 et $t_0+\Delta t$ est égale à $\frac{\Delta d}{\Delta t}$. Cette vitesse moyenne est aussi le coefficient directeur de la corde (AB).

Par définition, la vitesse instantanée au temps t_0 est la limite des vitesses moyennes lorsque Δt tend vers 0, c'est donc $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$. Les mathématiciens notent ce nombre $d'(t_0)$ et l'appellent nombre dérivé de d en t_0.

Lorsque Δt se rapproche de 0, la corde (AB) se rapproche d'une droite limite, tracée en vert, appelée tangente au point A. Comme les droites bleues se rapprochent de la droite verte, il en est de même de leur coefficient directeur. On a donc :

- Pour l'analyste [a] : $d'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$.
- Pour le géomètre : $d'(t_0)$ = coefficient directeur de la tangente au point A.
- Pour le physicien : $d'(t_0)$ = vitesse instantanée au temps t_0.

a. L'analyse désigne la branche des mathématiques où on étudie les suites et les fonctions.

Définition 4

Lorsqu'une fonction f admet un nombre dérivé en tout point t d'une partie E de $\mathbb{R}$ [a], sa fonction dérivée est la fonction

$$f' : E \to \mathbb{R},\ t \mapsto f'(t).$$

a. Il revient au même de dire qu'il y a une tangente non verticale en tout point de E.

Toutes les fonctions f que vous avez étudiées jusqu'ici ont la particularité d'être dérivables sur leur ensemble de définition. En calculant $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}(t_0)$, on obtient les propriétés suivantes [1] :

Proposition 1 (dérivées usuelles)

Chacune des fonctions est dérivable sur son ensemble de définition.

$f(x)$	$f'(x)$
constante	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Proposition 2 (opérations sur les dérivées)

u et v sont deux fonctions dérivables sur une partie E de $\mathbb{R}$, k est un nombre réel. Sous réserve qu'elle soit bien définie, chacune des fonctions ci-dessous est dérivable sur E.

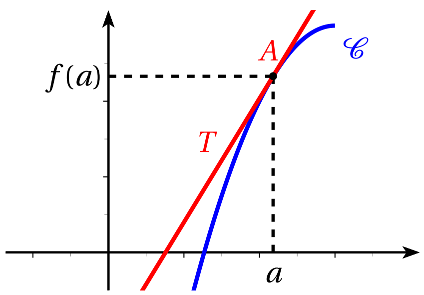
fonction	dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$u-v$	$u'-v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$

fonction	dérivée
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$v \circ u$	$u' \times (v' \circ u)$

Proposition 3 (équation de la tangente)

Soit f une fonction dérivable en a et soit A le point de la courbe de f d'abscisse a. On note T la tangente au point A. Son équation est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Remarque.
Le coefficient directeur de T est $f'(a)$.

1. Les calculs, menés par Newton et Leibniz au XVII° siècle, n'ont rien d'évident. Nous admettons les résultats et nous y reviendrons plus tard dans l'année.

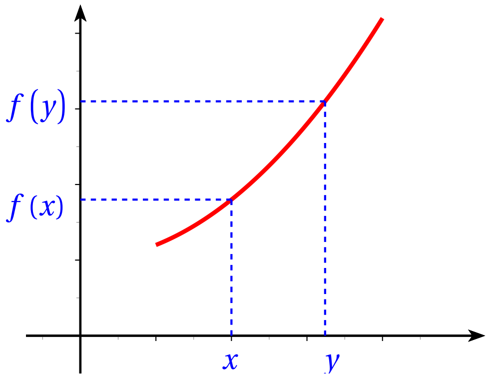
Définition 5

- Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ (x \leq y) \implies (f(x) \leq f(y)).$$

- Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ (x < y) \implies (f(x) < f(y)).$$



Deux nombres x et y sont rangés dans le même ordre que leurs images.

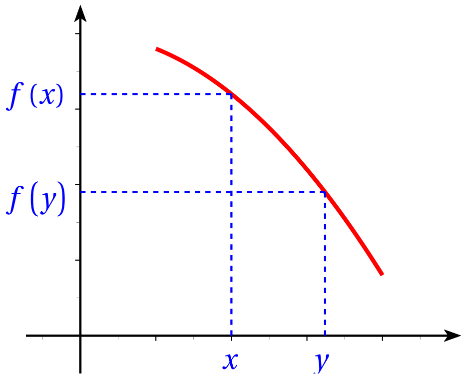
Définition 6

- Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ (x \leq y) \implies (f(x) \geq f(y)).$$

- Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si

$$\forall x \in I, \forall y \in I, \ (x < y) \implies (f(x) > f(y)).$$



Deux nombres x et y sont rangés en sens contraire de leurs images.

Déf. 7

- Lorsqu'une fonction f est croissante ou décroissante sur un intervalle I, on dit qu'elle est monotone.
- Lorsqu'une fonction f est strictement croissante ou strictement décroissante sur un intervalle I, on dit qu'elle est strictement monotone.

Théorème 1

I désigne un intervalle.

— Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I.

— Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ (sauf éventuellement en quelques points où on peut avoir $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I.

— Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

Exemple 5

Soit $g : [-3;2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0,5x^3 + 0,75x^2 - 3x - 1$.

Pour tout $x \in [-3;2]$:

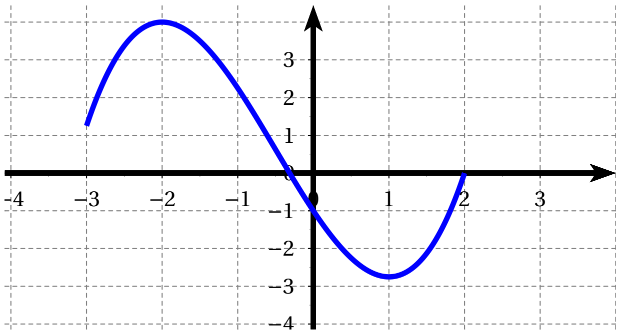
$$g'(x) = 0,5 \times 3x^2 + 0,75 \times 2x - 3 \times 1 - 0 = 1,5x^2 + 1,5x - 3.$$

La dérivée est du second degré, donc on utilise le discriminant. On trouve :

- $\Delta = 20,25$;
- les deux racines : $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

$a = 1,5 \oplus$ donc le signe est de la forme $\boxed{+\ \phi\ -\ \phi\ +}$

x	-3		-2		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1.25	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2.75	$\nearrow$	0



Définition 8

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in E$. On dit que :

- f est majorée s'il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, M est appelé majorant.
- f est minorée s'il existe un réel m tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, m est appelé minorant.
- f est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.
- f admet un maximum global en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, le nombre $f(x_0)$ est appelé maximum.
- f admet un minimum global en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in E$. Dans ce cas, le nombre $f(x_0)$ est appelé minimum.

Exemple 6

Dans l'exemple 5 :

- f admet un maximum en -2 et un minimum en 1.
- Le maximum de f est 4, son minimum est $-2,75$.
- f est bornée : elle est minorée par $-2,75$ et majorée par 4.

Remarque.
Le majorant et le minorant ne sont pas uniques. Par exemple, f est aussi majorée par 5, par 6, etc. (tout nombre ≥ 4 convient).

Définition 9

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in E$. On dit que :

- f admet un maximum local en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout x appartenant à un intervalle ouvert contenant x_0.
- f admet un minimum local en x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x appartenant à un intervalle ouvert contenant x_0.

Exemple 7

Dans l'exemple 5, f admet un minimum local en -3 et en 1, un maximum local en -2 et en 2.

Exercices

Exercices 3 à 8

III. Limites de fonctions

Commençons par deux exemples :

Exemple 8

On trace la courbe de la fonction

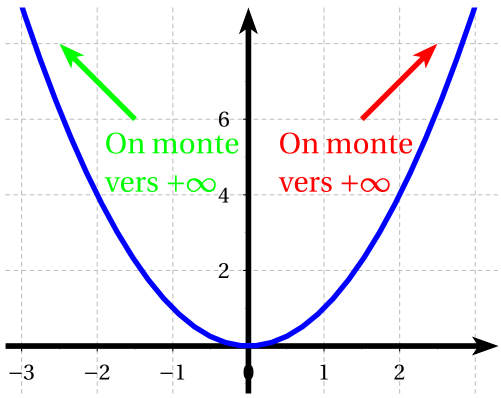
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

- Lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$ (flèche rouge). On écrit

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty.$$

- Lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$ (flèche verte). On écrit

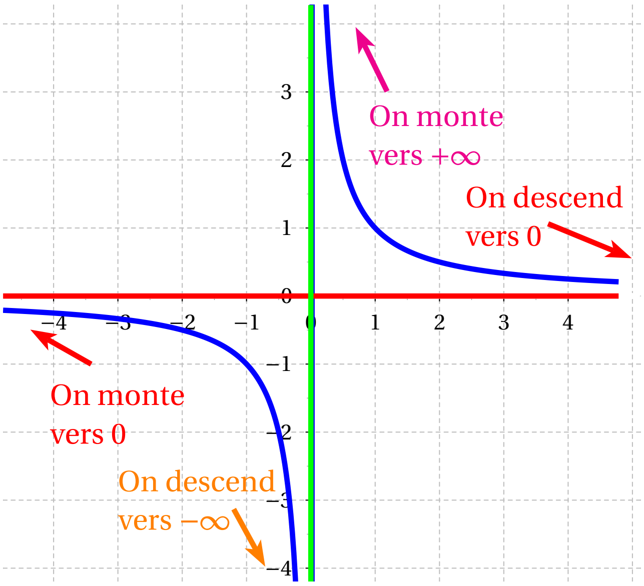
$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty.$$



Exemple 9

On trace la courbe de la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}.$$



- Lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ monte/descend vers 0 (flèches rouges). On écrit

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- On voit que la limite en 0 n'est pas la même suivant que x se rapproche de 0 en étant supérieur à 0, ou que x se rapproche de 0 en étant inférieur à 0 :

  — Lorsque x se rapproche de 0 par valeur supérieure (flèche rose), $f(x)$ tend vers $+\infty$. On écrit

$$\lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

  — Lorsque x se rapproche de 0 par valeur inférieure (flèche orange), $f(x)$ tend vers $-\infty$. On écrit

$$\lim_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Définition 10

a et ℓ désignent deux nombres réels

- Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- Lorsque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
- Lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou lorsque $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (la limite est prise en a, en $(a,\ x > a)$ ou en $(a,\ x < a)$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Exemple 10

Dans l'exemple 9 :

- la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$;
- la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote à la courbe représentative.

Exercices

Exercices 9 et 10

Proposition 4 (limites de référence en $\pm\infty$)

1. Si $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} c = \lim\limits_{x\to+\infty} c = c$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$
5. De même, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Proposition 5 (limites de référence en 0)

1. $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to 0,\ x>0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$
2. $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x^3} = -\infty$ et plus généralement, pour tout entier $n \geq 1$:
$$\lim_{x\to 0,\ x<0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Proposition 6 (règles de calcul avec les limites)

On résume dans un tableau les règles de calcul avec les limites. Dans chaque cas, la limite est prise en $+\infty$, $-\infty$, a (nombre réel), $(a,\ x > a)$ ou $(a,\ x < a)$.
c, ℓ et ℓ' désignent trois nombres réels.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$	$\lim(f \times g)$	$\lim \frac{f}{g}$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$	0
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell > 0 \\ +\infty & \text{si } \ell < 0 \end{cases}$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$+\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim f$	$\lim(c \times f)$
ℓ	$c \times \ell$
$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$
$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } c > 0 \\ +\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$

FI : forme indéterminée

Exemples 11

1. On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)$.

On utilise les deux théorèmes précédents : d'abord

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} & =0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-3) & =-3\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3\times\frac{1}{x^2}\right)=-3\times 0=0,$$

puis

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty}4 & =4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{x^2} & =0\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)=4+0=4.$$

En pratique, on s'autorise à aller plus vite :

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-3\times\frac{1}{x^2}\right)=4-3\times 0=4.$$

2. On calcule $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)$.

Pour alléger, on écrit entre guillemets certaines opérations qui n'ont pas de sens véritable, mais qui correspondent à des opérations sur les limites de la proposition 6[a]. C'est toléré en 1re année et cela fait gagner du temps :

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(2+\frac{1}{x}\right)= & \text{« } 2+(+\infty)\text{ »}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(2-\frac{1}{x}\right)= & \text{« } 2-(+\infty)\text{ »}=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x}\right)=\text{« } (+\infty)\times(-\infty)\text{ »}=-\infty.$$

a. Ou qui s'y ramènent facilement.

Remarque.
Certaines limites ne peuvent être obtenues simplement à partir des règles de calcul de la proposition 6 et nécessitent une étude complémentaire. C'est le cas des calculs des cinq formes suivantes

$$\infty-\infty\quad,\quad 0\times\infty\quad,\quad\frac{\infty}{\infty}\quad,\quad\frac{0}{0}\quad,\quad 1^{\infty},$$

que l'on appelle formes indéterminées.

Par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)$ sont toutes les deux de la forme $\infty-\infty$, mais les deux limites sont différentes : d'un côté

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(x-1)=\text{« } (+\infty)\times(+\infty)\text{ »}=+\infty,$$

de l'autre

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x)=\text{« } (+\infty)\times(-\infty)\text{ »}=-\infty.$$

Nous apprenons à « lever » ce type d'indétermination de façon automatique dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 12

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+1\right)$.

Il s'agit d'une forme indéterminée. On met le terme de plus haut degré, x^2, en facteur :

$$x^2-4x+1=x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right).$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2 &= +\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\tfrac{4}{x}+\tfrac{1}{x^2}\right) &= 1-4\times0+0=1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$$

Exercices

Exercices 11 et 12

Exemple 13

On calcule $\lim\limits_{x\to3,\ x>3}\frac{x-5}{-2x+6}$.

Lorsque x se rapproche de 3, le numérateur $x-5$ se rapproche de $3-5=-2$, et le dénominateur $-2x+6$ se rapproche de $-2\times3+6=0$. On est donc ramené à un calcul de la forme « $\frac{-2}{0}$ ».

La réponse dépend du signe du dénominateur : $-2x+6$ se rapproche-t-il de 0 en étant du signe $+$, auquel cas on a « $\frac{-2}{0^+}$ » $=-\infty$; ou en étant du signe $-$, auquel cas on a « $\frac{-2}{0^-}$ » $=+\infty$?

Pour le savoir, on construit le tableau de signe :

x	$-\infty$		3 ◀		$+\infty$
$-2x+6$		$+$	0	$-$	

où l'on voit que quand x se rapproche de 3 en étant supérieur à 3, donc par la droite (flèche ◀), $-2x+6$ se rapproche de 0 en étant négatif.

Finalement

$$\lim_{x\to3,\ x>3}\frac{x-5}{-2x+6}=\text{« }\frac{-2}{0^-}\text{ »}=+\infty.$$

Exercices

Exercices 13 et 14

IV. Exponentielle et logarithme

Commençons par un rappel informel :

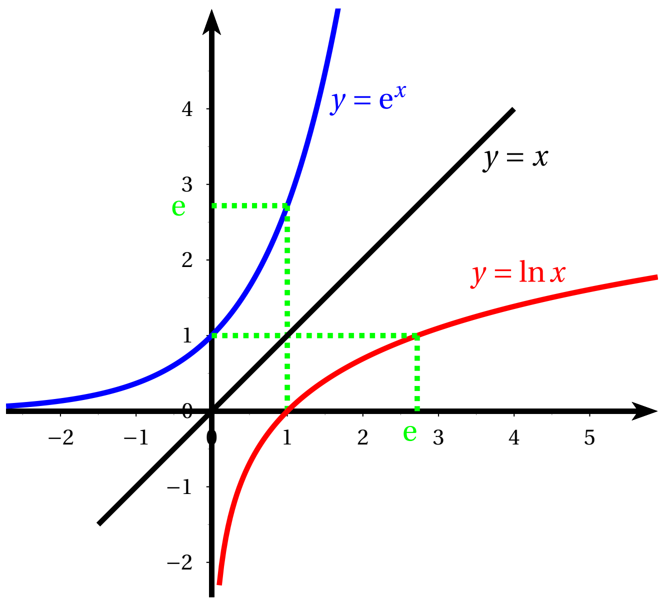
- La fonction exp est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \mathrm{e}^x,$$

  où $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$ est un nombre qui vaut environ 2,718.

- La fonction ln est la réciproque de la fonction exp, comme « la racine carrée est l'opération inverse du carré (pour les nombres positifs) ».

Les courbes des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



On rappelle maintenant toutes les propriétés de façon plus rigoureuse. On commence par les relations fondamentales, puis on enchaîne avec les dérivées, les variations, le signe et les limites :

Proposition 7 (relations fondamentales)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$

2. $\forall x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln x} = x$

Proposition 8 (dériv., var. et lim. de exp)

1. exp est définie sur $\mathbb{R}$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exp)'(x) = \exp(x)$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$

4. exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Proposition 9 (dériv., var. et lim. de ln)

1. ln est définie sur $]0, +\infty[$

2. $\forall x \in]0, +\infty[,\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$

3. $x > 1 \implies \ln x > 0 \quad , \quad x < 1 \implies \ln x < 0$

4. ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

5. $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \ln x = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Proposition 10

Soit $u : E \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

1. $\mathrm{e}^u : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur E et

$$\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u.$$

2. Si u est strictement positive sur E, $\ln \circ u : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur E et

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}.$$

Proposition 11 (croissances comparées)

Pour tout entier $n \geq 1$:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0.$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} x^n \ln x = 0.$

On continue avec les propriétés algébriques de l'exponentielle et du logarithme népérien.

Proposition 12 (propriétés alg. de $\exp$)

Pour tous $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$:

1. $e^x \times e^y = e^{x+y}$
2. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
3. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
4. $(e^x)^n = e^{nx}$
5. $e^0 = 1 \quad , \quad e^1 = e \approx 2,718$

Proposition 13 (propriétés alg. de $\ln$)

Pour tous $x>0$, $y>0$, $n\in\mathbb{Z}$:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y.$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x.$
4. $\ln(x^n) = n\ln x.$
5. $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln x.$

Exercices

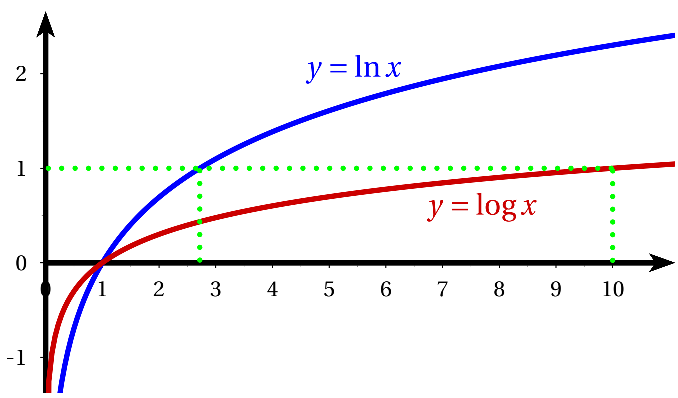
Exercices 15 à 24

Remarque.

En sciences physiques, on utilise souvent le logarithme décimal, noté log, ou $\log_{10}$, et défini comme la réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$.
Par exemple, $10^4 = 10\,000$, donc $\log(10\,000) = 4$.
Ou encore $10^{-2} = 0,01$, donc $\log(0,01) = -2$.

Pour tout $x>0$:

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$



Pour terminer, on revient vers les calculs de limites, avec la limite d'une composée, les théorèmes de limite par comparaison et des gendarmes ; et enfin trois dernières limites de référence.

Exemple 14 (limite d'une composée)

On calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}$.

C'est une expression de la forme e^X, avec $X = -x^2$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $X = -x^2$ tend vers $-\infty$, donc son exponentielle, $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{-x^2}$, tend vers 0. Il est agréable de présenter les choses ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-x^2\right) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = \text{« } \mathrm{e}^{-\infty} \text{ »} = 0.$$

Exercices

Exercices 25 et 26

Proposition 14 (limite par comparaison)

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. I est un intervalle contenant a ou dont a est une extrémité. f et g sont deux fonctions définies sur I (sauf peut-être en a) telles que :

1. Pour tout $x \in I$ (sauf peut-être pour $x = a$), $f(x) \geq g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Exemple 15

On démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$:

On a vu dans l'exercice 22 que $\mathrm{e}^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$, donc par le théorème de comparaison :

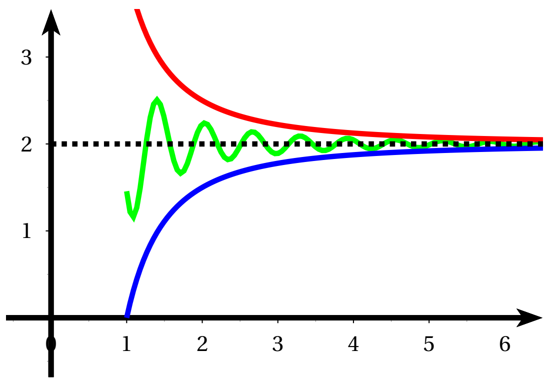
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Proposition 15 (théorème des gendarmes)

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. I est un intervalle contenant a ou dont a est une extrémité, ℓ est un nombre réel. f, g, h sont trois fonctions définies sur I (sauf peut-être en a) telles que :

1. Pour tout $x \in I$ (sauf peut-être pour $x = a$), $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.



Exercices

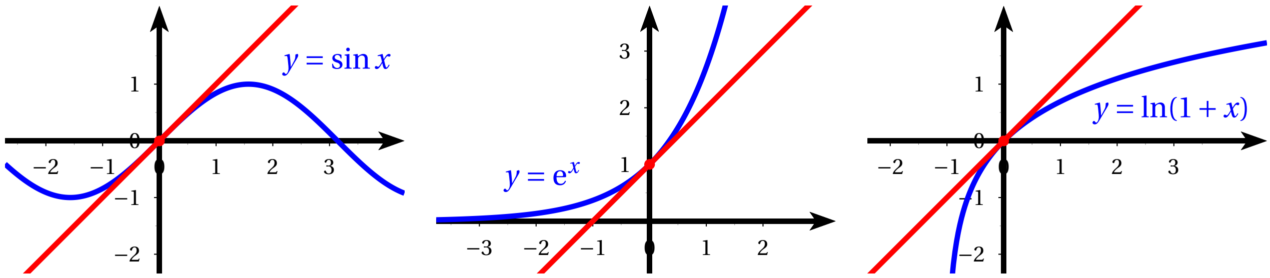
Exercice 27

Proposition 16

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Remarque.
Ces limites expliquent les approximations $\sin x\approx x$, $e^x\approx 1+x$ et $\ln(1+x)\approx x$ lorsque x est « proche de 0 », que l'on utilise parfois dans le cours de physique.

Elles s'interprètent géométriquement par le fait que les tangentes aux courbes d'équations $y=\sin x$, $y=e^x$ et $y=\ln(1+x)$ en leurs points d'abscisses 0 ont une pente égale à 1 :



V. Intégration

Déf. 11 On dit qu'une fonction F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in I$.

Exemple 16

Posons $f(x)=3x^2$ pour $x\in\mathbb{R}$. Alors la fonction F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On pourrait aussi prendre $F(x)=x^3+2$, ou $F(x)=x^3-4$, ... et plus généralement $F(x)=x^3+C$ (C constante). Mais il n'y a pas d'autre choix possible d'après la proposition ci-dessous.

Proposition 17

Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, alors les primitives de f sont les fonctions $x\mapsto F(x)+C$ (C constante).

La « primitivation » est donc l'opération inverse de la dérivation (à une constante additive près), et cette seule information doit permettre aux élèves les plus à l'aise de déterminer les primitives [2]. Il nous a tout de même paru opportun d'indiquer dans des tableaux les primitives qui reviennent

2. Comme on utilise les tables de multiplication pour effectuer les divisions.

le plus souvent dans les exercices :

Proposition 18

Fonctions	Primitives
e^{ax} $(a \neq 0)$	$\frac{1}{a}e^{ax}+C$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

Fonctions	Primitives
$\frac{u'}{u}$ $(u \neq 0)$	$\ln(\lvert u\rvert)+C$
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$

C désigne une constante réelle.

Exemple 17

On pose $f(x)=6x^3+e^{0,5x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Les primitives de f sont les fonctions de la forme (C désigne une constante réelle) :

$$\begin{aligned}F(x)&=6\times\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{0,5}e^{0,5x}+C\\&=1,5x^4+2e^{0,5x}+C.\end{aligned}$$

Exemple 18

On pose $g(x)=\frac{1}{x-1}$ pour $x \in]1;+\infty[$. Les primitives de g sont les fonctions de la forme (C désigne une constante réelle) :

$$G(x)=\ln(x-1)+C.$$

Déf.12

On dit que f est continue sur l'intervalle I si on peut tracer sa courbe représentative sur I « sans lever le crayon ».

Remarque.
On donnera une définition plus rigoureuse plus tard dans l'année.

Définition 13

Soit f une fonction continue et F une primitive de f sur un intervalle $[a;b]$. L'intégrale de a à b de f est le nombre

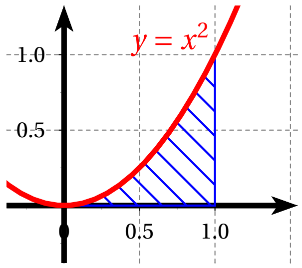
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

Remarque.
$F(b)-F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

Exemple 19

Une primitive de $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3$, donc

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\times 1^3\right) - \left(\frac{1}{3}\times 0^3\right) = \frac{1}{3}.$$



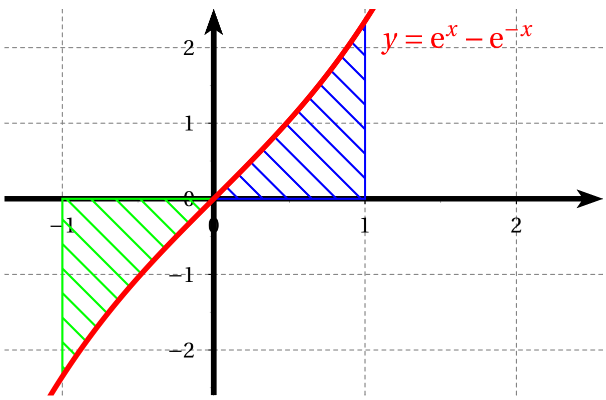
Remarques.

- Les primitives d'une fonction f sont égales à une constante additive près, donc la valeur de $F(b) - F(a)$ ne change pas si on prend une autre primitive.
- Le nombre $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ est l'aire de la zone située entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = x^2$ (hachurée en bleu ci-dessus).
- x est une variable muette dans $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$: on peut noter $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, etc.

Exemple 20

Une primitive de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ est $F : x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, donc

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^1$$
$$= \left(\mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1}\right) - \left(\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^1\right)$$
$$= \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^1 = 0.$$



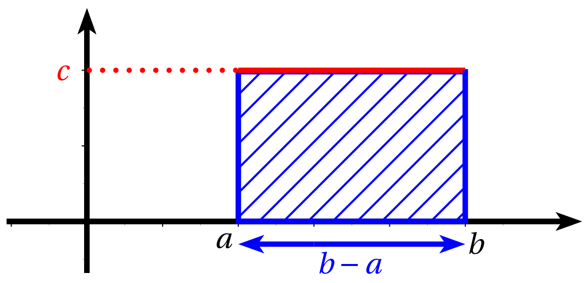
Remarque.
Le nombre $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ est la différence entre les aires des zones bleue et verte. Ce nombre vaut 0, parce que les aires se compensent.

Exemple 21 (intégrale d'une fonction constante)

Pour tous réels $a \leq b$, pour tout réel c :

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = [cx]_a^b = cb - ca = c(b-a).$$

Lorsque $c > 0$, c'est l'aire d'un rectangle de côtés $(b-a)$ et c.



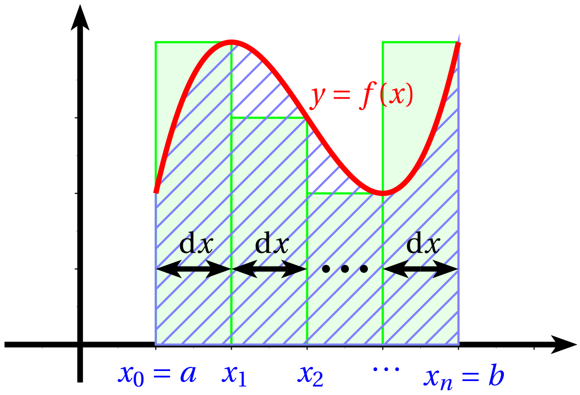
Remarque.

La notation $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un héritage de l'époque où on a défini l'intégrale : à l'origine, le symbole $\int$ désignait une somme ; et on peut voir une intégrale comme la somme des aires d'une infinité de rectangles de largeur nulle.

Plus précisément, l'aire sous la courbe est approximée par la somme des aires de petits rectangles de largeur $\mathrm{d}x$ et dont la hauteur dépend de la valeur de la fonction : l'aire vaut approximativement

$$f(x_1)\,\mathrm{d}x + f(x_2)\,\mathrm{d}x + \cdots + f(x_n)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\mathrm{d}x.$$

Pour faire le lien entre aire et intégrale, on calcule la limite de la somme lorsque $\mathrm{d}x$ tend vers 0. On prouve qu'elle est égale à $F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f.



Exercices

Exercices 28 et 29

Proposition 19 (linéarité de l'intégrale)

Pour toutes fonctions f, g continues sur $[a;b]$, pour tous réels α, β :

$$\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Exemple 22

Posons $I=\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}$ et $J=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.
I est difficile à calculer telle quelle, mais il y a une astuce :

- On commence par calculer J. On reconnaît la formule $\frac{u'}{u}=(\ln\circ u)'$, avec $u(x)=x^2+1$. On a donc
$$J=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \ln\left(1^2+1\right)-\ln\left(0^2+1\right)=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$
- Ensuite on calcule $I+\frac{1}{2}J$. Par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} I+\frac{1}{2}J &= \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{x^2+1}+\frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{2}\times 0^2=\frac{1}{2}. \end{aligned}$$
- On peut conclure : $I=\left(I+\frac{1}{2}J\right)-\frac{1}{2}J=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2.$

Remarque.
On utilise généralement les trois cas particuliers :

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x$;
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x$;
- $\alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x$.

Exercices
Exercices 30 et 31

VI. Exercices

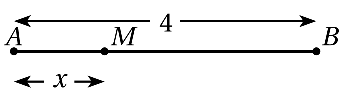
Exercice 1.
Dans l'exercice, chacune des fonctions est définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer une formule pour $v \circ u(x)$ et une formule pour $u \circ v(x)$.

1. $u(x) = x^2$, $v(x) = 4x+1$.
2. $u(x) = x+2$, $v(x) = x^3 - 3x$.
3. $u(x) = x-4$, $v(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Exercice 2 (🏛).
Dans chaque cas, écrire la fonction sous la forme $v \circ u$, en précisant bien à chaque fois l'ensemble de définition de u et de v.

1. $f(x) = \sqrt{x-5}$.
2. $h(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$.
3. $i(x) = \ln(|x-2|)$.

Exercice 3.
On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 et un point mobile M pouvant se déplacer librement sur ce segment.



On note x la longueur du segment $[AM]$ et $f(x)$ le produit des longueurs $AM \times BM$.

1. Prouver que $f(x) = 4x - x^2$.
2. Où faut-il placer le point M pour que le produit des longueurs $AM \times BM$ soit maximal ?

Exercice 4 (🏛).
Soit $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de i.
2. a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction i au point d'abscisse 0.
   b. Étudier les positions relatives de (T) et (C).
3. Construire (C) et (T) dans un même repère.

Exercice 5.
Voici les tableaux de variations de deux fonctions f et g. Pour chacune d'elle :

- Dire si elle est majorée, minorée, bornée. Si elle est majorée (resp. minorée), donner un majorant (resp. minorant).
- Dire si elle admet un maximum global, si elle admet un minimum global.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Exercice 6.

Soit $f : [1;4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \dfrac{4}{x} - 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A, B, C les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1, 2, 4 ; et T_A, T_B, T_C les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

1. Prouver que $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ pour tout $x \in [1;4]$.
2. Construire le tableau de variations de f.
3. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$, puis déterminer l'équation de T_A.
4. Déterminer également les équations de T_B et T_C.
5. Tracer les trois tangentes dans un repère orthonormé, puis construire la courbe de la fonction f.

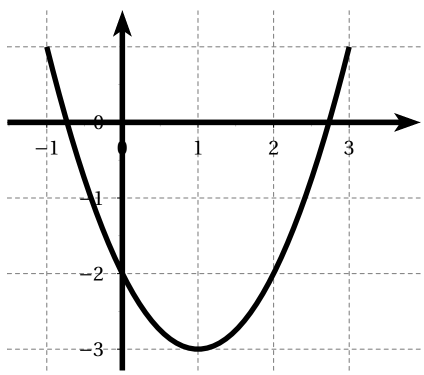
Exercice 7.

La distance (en m) parcourue au temps t (en s) par une pierre en chute libre est $d(t) = 5t^2$.
On lance cette pierre d'une hauteur de 20 m.

1. Combien de temps la pierre met-elle pour arriver au sol ?
2. Construire la courbe représentative de la fonction d dans un repère orthogonal (graduer de 0,2 en 0,2 en abscisse, et de 2 en 2 en ordonnée).
3. Déterminer la vitesse de la pierre au moment de l'impact au sol.

Exercice 8 ( ).

1. On a tracé ci-dessous la courbe de la fonction $f : [-1;3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 2x - 2$.



   Reproduire le graphique et construire la courbe de la fonction $g : [-1;3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left|x^2 - 2x - 2\right|$.

2. On considère une fonction $h : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(x)$. Prouver que h est bornée si, et seulement si, $|h|$ est majorée.

Exercice 9.

1. Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction h définie sur $]1;+\infty[$ et telle que :
   a. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
   b. La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
   c. h est strictement croissante sur $]1;3]$ et strictement décroissante sur $[3;+\infty[$.
   d. $h(3) = 2$.
2. Quelles sont les limites de h en $+\infty$ et en 1 ?

Exercice 10.

Construire la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction i admettant le tableau de variations ci-dessous, sachant de plus que les solutions de l'équation $i(x) = 0$ sont 0, 2 et 6.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$i(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	3

Interpréter les limites en termes d'asymptotes.

Exercice 11 ( ).

Calculer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to0,x>0} \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0,x<0} \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)$.
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 5x + 3\right)$.
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - 2x\right)$.
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x-1}{2x+1}$.

Exercice 12 ( ).

Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x + \dfrac{4}{x} - 3$ (cf ex 6) dont voici le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $(0,\ x > 0)$. Interpréter (si possible) en termes d'asymptotes.

Exercice 13 (🏛).
Calculer les limites :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1, x>1} \frac{1}{x-1}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1, x<1} \frac{1}{x-1}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 4, x>4} \frac{x+2}{-x+4}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 4, x<4} \frac{x+2}{-x+4}$.

Exercice 14 (🏛).
Soit $j : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{x}{2x+1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer la dérivée et étudier les variations de j.
2. Calculer les limites de j aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter en termes d'asymptotes.
3. Construire $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

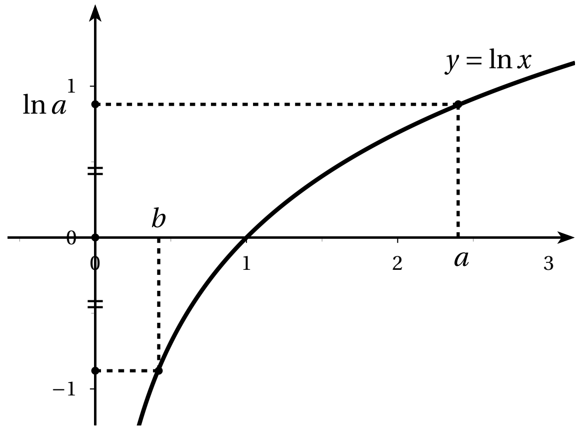
Exercice 15 (🏛).
Résoudre les équations et inéquations :

1. $e^x - 4 = 0$.
2. $e^{2x} \leq 9$.
3. $e^{-x} - 1 = 3$.
4. $e^{-2x} = -5$.
5. $2\ln x - 6 = 0$.
6. $\ln(2x-6) = 0$.
7. $\ln x \leq 2$.
8. $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$.
9. $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$.

Exercice 16 (🏛).

1. Exprimer chacun des nombres ci-dessous sous la forme e^a, avec $a \in \mathbb{R}$:
$$\frac{e^8}{e^2 \times e^1 \times e^3}, \qquad \frac{e \times e^2}{(e^2)^2}, \qquad (e^2)^3 \times e^{-5}.$$
2. Exprimer en fonction de $\ln 2$:
$$\ln(8), \qquad \ln\left(\frac{1}{4}\right), \qquad \ln 6 - \ln 3 + \ln\left(\sqrt{2}\right).$$
3. En utilisant une identité remarquable, résoudre l'équation
$$e^{2x} + e^{-2x} = 1.$$

Exercice 17.
On a construit ci-dessous la courbe de la fonction $\ln$.
À l'aide du codage, exprimer b en fonction de a.



Exercice 18 (🏛).

1. Étudier la fonction
$$h :]0; +\infty[\to \mathbb{R} : \; x \mapsto x \ln x$$
(dérivée, variations, limites).
2. La fonction h est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?

Exercice 19 (🏛).
Étudier la fonction
$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R} : \; x \mapsto x - 2\ln x$$
(dérivée, variations, limites).

Exercice 20 (🏛).

1. Étudier la fonction
$$g : [0; +\infty[\to \mathbb{R} : \; x \mapsto (-2x+1)e^{-x}$$
(dérivée, variations, limites).
2. La fonction g est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?

Exercice 21 (🏛).
Étudier la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto e^{2x} - 8x$ (dérivée, variations, limites).

Exercice 22 (🏛).

On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle et T sa tangente au point $A(0;1)$.

1. Déterminer l'équation de T et faire une figure.
2. À l'aide d'une étude de fonction, prouver que $e^x \geq x+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 23 (🏛).

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$
2. Étudier les variations de g.
3. Calculer la limite de g en $-\infty$. Interpréter en termes d'asymptote.
4. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$
Calculer ensuite la limite de g en $+\infty$ et interpréter en termes d'asymptote.
5. La fonction g est-elle majorée ? Minorée ? Bornée ?
6. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
7. Construire la droite T, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

Exercice 24 (🏛).

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée de la fonction.

1. $f(x) = e^{-x^2}$.
2. $g(x) = e^{\cos x}$.
3. $h(x) = \ln(2x-1)$.
4. $i(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Exercice 25 (🏛).

Calculer les limites :

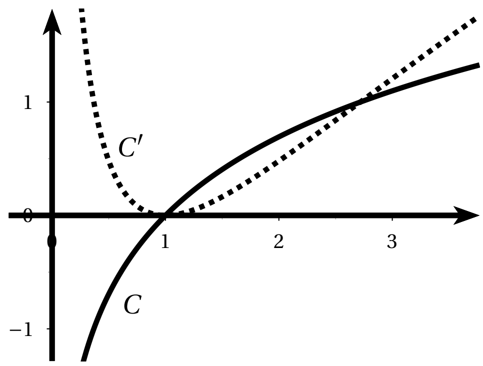
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0, x>0} (\ln x)^3$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x + 1\right)$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x - x + 1\right)$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0, x<0} e^{1/x}$.

Exercice 26 (🏅).

Les fonctions f et g sont définies sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad g(x) = (\ln x)^2.$$

On note C et C' leurs courbes représentatives respectives, tracées ci-dessous.



1. **a.** Prouver que pour tout $x \in]0;+\infty[$:
$$g'(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$
b. Étudier les variations de g et calculer ses limites.
2. **a.** Construire le tableau de signe de
$$\ln x - (\ln x)^2.$$
b. En déduire les positions relatives de C et C'.
3. Pour tout réel $x \in [1;e]$, on note M (respectivement N) le point de C (resp. C') d'abscisse x.
Déterminer la valeur de x pour laquelle la longueur MN est maximale.

Exercice 27 (🏛).

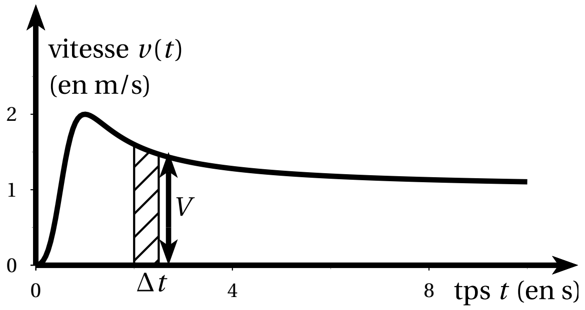
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Exercice 28 (🏛).

Calculer les intégrales :

1. $I = \int_0^4 (2x-3)\,dx$.
2. $J = \int_0^1 \left(x^3 - x\right)dx$.
3. $K = \int_{-1}^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt$.
4. $L = \int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$.
5. $M = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\,dx$.
6. $N = \int_1^e \frac{(\ln t)^3}{t}\,dt$.

Exercice 29.
La vitesse $v(t)$ d'une voiture téléguidée en fonction du temps t est donnée par le graphique ci-dessous pendant un intervalle de temps de 10 secondes.



1. Que représente concrètement l'aire de la zone hachurée ?
2. Que représente concrètement le nombre $\int_1^8 v(t)\mathrm{d}t$? Et le nombre $\frac{1}{7}\int_1^8 v(t)\mathrm{d}t$?

Exercice 30 (🏛).

1. Prouver que
$$\frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}$$
pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_1^2 \frac{x+4}{x(x+2)}\mathrm{d}x$. On écrira la réponse sous la forme du logarithme d'un nombre.

Exercice 31 (🏛).
On pose $I = \int_0^{\ln 4} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^{\ln 4} \frac{1}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$.

On écrira chaque réponse sous la forme du logarithme d'un nombre.

1. Calculer I.
2. Calculer $I + 2K$.
3. En déduire K.