Chapitre 2 : Trigonométrie

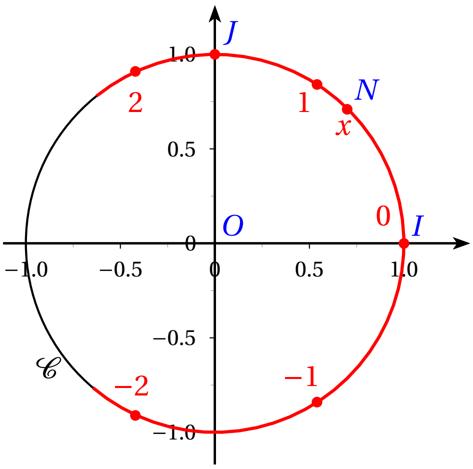
I. Cercle trigonométrique, cosinus, sinus

Définition 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 1.

En utilisant la même unité de longueur que celle du repère (O, I, J), on gradue le cercle $\mathscr{C}$, de $-\infty$ à $+\infty$, en plaçant la graduation 0 au point I et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre = sens direct = sens trigonométrique.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit N le point de $\mathscr{C}$ situé à la graduation x. On dit alors que N est le point de $\mathscr{C}$ associé à x.



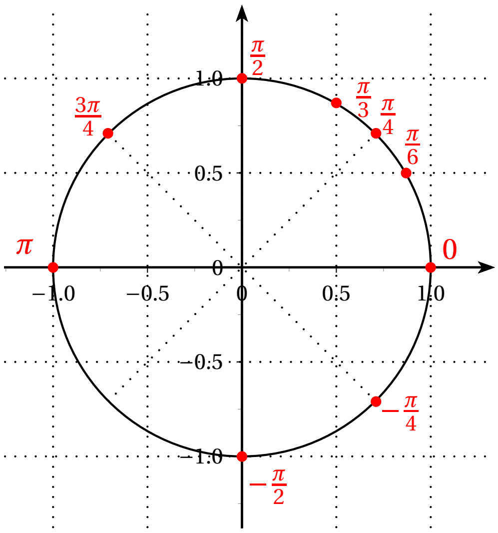
La figure ci-contre montre toutes les valeurs remarquables du cercle trigonométrique :

$$0\,,\ \frac{\pi}{6}\,,\ \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\pi}{3}\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ \pi,$$

pour lesquelles on tourne de

$$0°\,,\ 30°\,,\ 45°\,,\ 60°\,,\ 90°\,,\ 180°$$

dans le sens trigonométrique, à partir de la graduation 0.
À titre informatif, on a ajouté les valeurs $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On notera que le point associé à $\frac{\pi}{3}$ a pour abscisse $\frac{1}{2}$; tandis que celui associé à $\frac{\pi}{6}$ a pour ordonnée $\frac{1}{2}$.

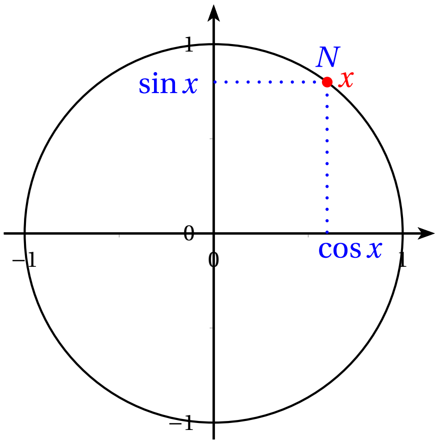


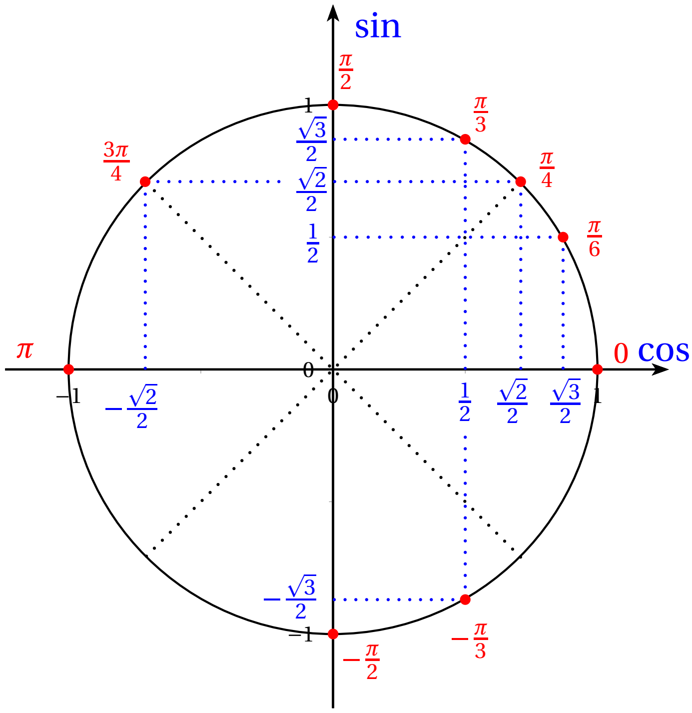
Remarque. Tout point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de valeurs. Par exemple, le point associé à 0 est aussi associé à 2π (on fait 1 tour de cercle dans le sens direct), 4π (2 tours dans le sens direct), 6π (3 tours dans le sens direct), ..., -2π (1 tour dans le sens indirect), -4π (2 tours dans le sens indirect), -6π (3 tours dans le sens indirect), ...

Définition 2

Soit x un nombre réel et soit N le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associé à x. On pose :

$$\cos x = x_N \qquad , \qquad \sin x = y_N.$$





Les valeurs remarquables du cos et du sin sont indiquées ci-dessous.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0

Exemple 1

On place les points associés à $\frac{3\pi}{4}$ et à $-\frac{\pi}{3}$. Par simple lecture du cercle trigonométrique on obtient :

- $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarques.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad , \qquad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

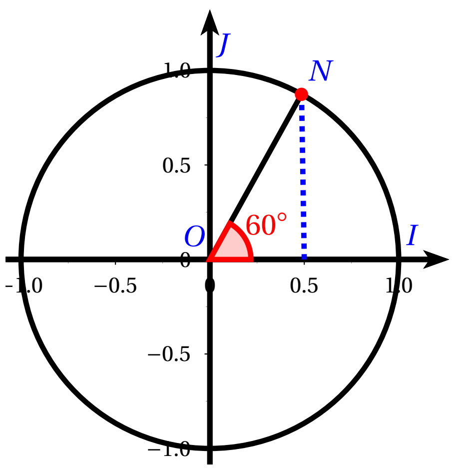
- Notre définition du cos et du sin étend aux nombres réels la définition du cos et du sin donnée au collège pour les angles géométriques. Notant par exemple N le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$\cos(60°) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Le radian est une unité de mesure des angles proportionnelle au degré. Par définition, un angle de $180°$ mesure π radians. Donc par exemple, sur la figure ci-contre :

$$\widehat{ION} = 60° = \frac{\pi}{3} \text{ radians.}$$

- Lorsqu'on utilise la calculatrice, il faut mettre en mode degré ou en mode radian suivant la situation : pour calculer $\cos(60°)$, il faut mettre en mode degrés; et pour $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, en mode radians.



Exercices

Exercices 1 et 2

Proposition 1

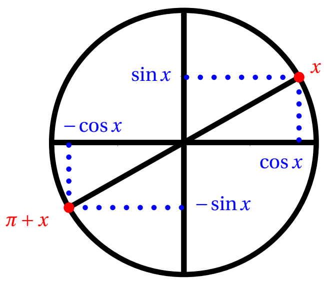
Pour tout réel x : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

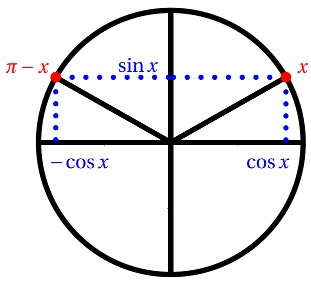
Proposition 2 (angles associés)

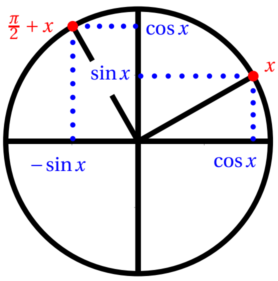
Pour tout réel x :

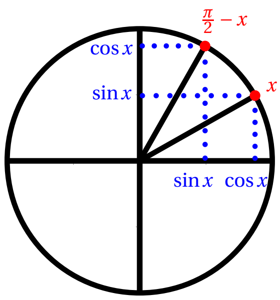
$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$







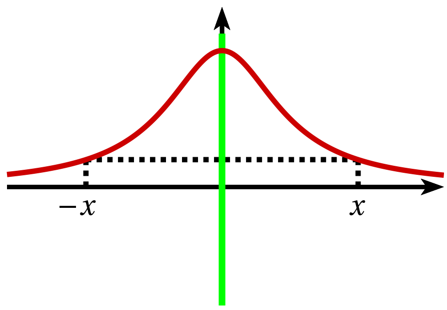


Venons-en à présent aux fonctions cos et sin. On commence par un rappel sur la parité et sur la périodicité.

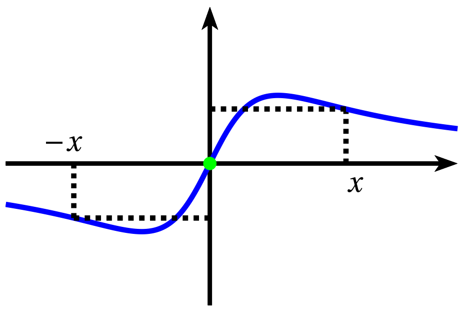
Définition 3

Une fonction f dont l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 est dite :

- Paire si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.
- Impaire si $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$.



Fonction paire.



Fonction impaire.

Proposition 3

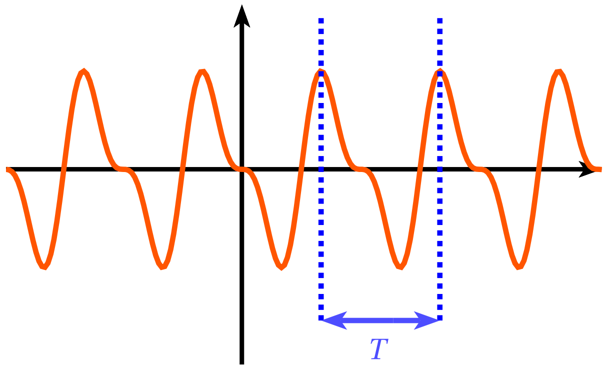
1. La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 4

Soit f une fonction et soit $T > 0$. On dit que f est $T-$périodique si :

- l'ensemble de définition D_f de f est invariant par un décalage de T en abscisse ($\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_f \iff x+T \in D_f$) ;
- $\forall x \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$.

La courbe d'une fonction $T-$périodique se reproduit identique à elle-même tous les T.



Proposition 4

1. La fonction cos est paire :

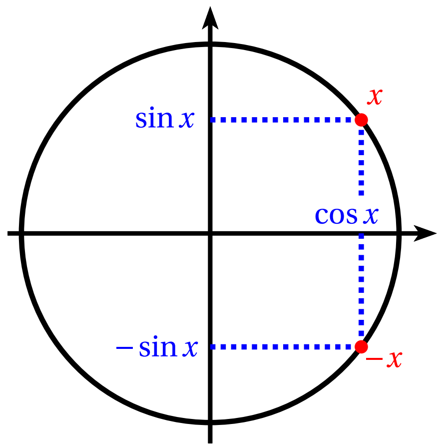
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x.$$

2. La fonction sin est impaire :

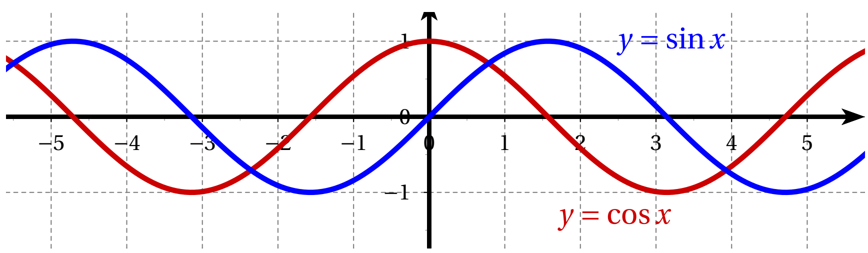
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x.$$

3. Les fonctions cos et sin sont $2\pi-$périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x,\ \sin(x+2\pi) = \sin x.$$



On trace les courbes représentatives des fonctions cos et sin, en trois étapes : on commence par tracer les courbes sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis on complète par symétrie sur $[-\pi;0]$ grâce à la parité ; enfin on trace les courbes sur $\mathbb{R}$ tout entier par périodicité.



Pour terminer cette section, on rappelle les dérivées des fonctions cos et sin.

Proposition 5

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

1. $(\cos)'(x) = -\sin x$.
2. $(\sin)'(x) = \cos x$.

Exercices

Exercices 3 à 5

II. Formules d'addition, applications

Proposition 6 (formules d'addition)

Pour tous réels a, b :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Exemple 2

On calcule $\cos\frac{\pi}{12}$. Pour cela, on remarque que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$. Donc d'après la 1re formule d'addition :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Proposition 7 (formules de duplication)

Pour tout réel a :

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.
2. $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$.

Exercices

Exercices 6 à 9

Exemple 3 (transformation de Fresnel)

Soit x un réel. On transforme l'expression $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ grâce aux formules de duplication. Comme $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1\cos x + \sqrt{3}\sin x$, on commence par mettre $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$ en facteur :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right).$$

On sait que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc en utilisant $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$:[a]

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

a. Pour la dernière étape du calcul, on utilise la formule $\cos(-t) = \cos t$, et on remarque que $\frac{\pi}{3} - x$ et $x - \frac{\pi}{3}$ sont opposés.

Exercices

Exercices 10 à 12

La méthode se généralise :

Proposition 8 (transformation de Fresnel)

Soient a, b, x trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Alors

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta),$$

où θ est un réel tel que $\begin{cases} \cos\theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.

Remarque. Dans le cours de physique, la formule s'utilise sous la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t+\varphi)$, ou bien sous la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t+\varphi)$ (avec les mêmes $A > 0$ et $\omega > 0$ dans les deux cas, mais des valeurs de φ différentes).

Les formules ci-dessous découlent des formules d'addition :

Proposition 9 (formules de factorisation)

Pour tous réels p, q :

1. $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
2. $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
3. $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
4. $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exemple 4

Soit x un réel. On transforme une somme en produit :

$$\begin{aligned}\cos(3x) - \cos x &= -2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) \\ &= -2\sin(2x)\sin x\end{aligned}$$

Exercices

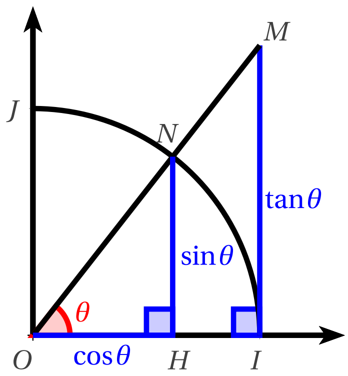
Exercice 13

III. Tangente

Déf.5

Soit θ un angle aigu (entre 0° inclus et 90° exclu) et soit N le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'ordonnée positive et tel que $\widehat{ION} = \theta$. La tangente à $\mathscr{C}$ au point I coupe la demi-droite $[ON)$ en M. On pose

$$\tan\theta = IM.$$



Remarques.

- Comme $OI = 1$, dans OIM rectangle en I :

$$\tan\theta = IM = \frac{IM}{OI} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}.$$

  On retrouve ainsi la formule du collège.
- D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{HN}{OH} = \frac{IM}{OI} = IM = \tan\theta.$$

  En pratique, c'est avec cette formule que l'on calcule les tangentes d'angles géométriques.

Exemple 5

$\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}.$

Par analogie, on définit la tangente d'un nombre réel :

Déf.6

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\cos x \neq 0$, on pose

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Remarques.

- Les solutions de l'équation $\cos x = 0$ sont les $\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, donc l'ensemble de définition de la fonction tan est $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- On a donné l'ensemble de définition « en compréhension ». Autres exemples : $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs, et $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ désigne l'ensemble des réels positifs.

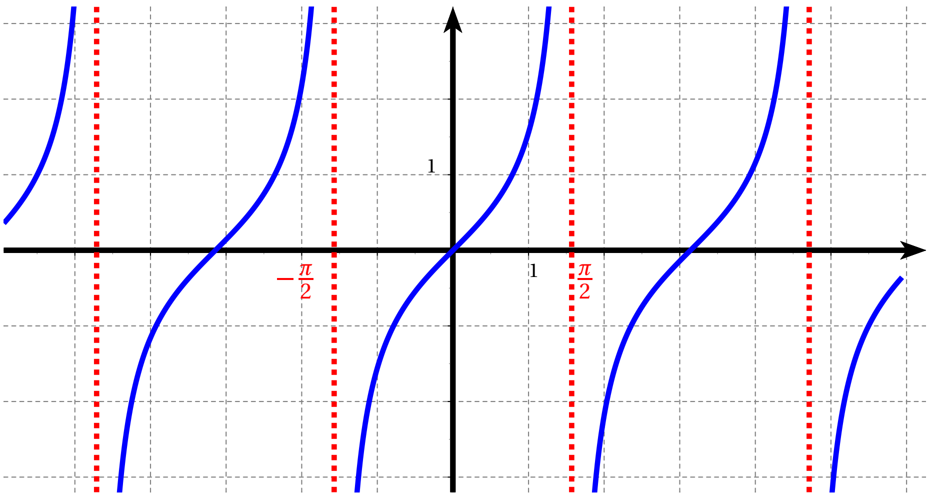
Exemple 6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Pour conclure, on s'intéresse à la parité et à la périodicité de la fonction tan (on note D son ensemble de définition) et on trace sa courbe représentative :

- $\forall x \in D\ :\ \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, donc tan est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à O.
- $\forall x \in D\ :\ \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$, donc tan est π-périodique.

On trace la courbe représentative sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, puis on complète par symétrie et par périodicité. Sur le graphique, on a ajouté des lignes en pointillés au niveau des valeurs interdites.



Proposition 10

La fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition D, et

$$\forall x \in D,\ (\tan)'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Démonstration

Pour tout $x \in D$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. On applique la formule pour la dérivée d'un quotient [a], avec

$$u(x) = \sin x \quad , \quad v(x) = \cos x,$$
$$u'(x) = \cos x \quad , \quad v'(x) = -\sin x.$$

On obtient, pour tout $x \in D$:

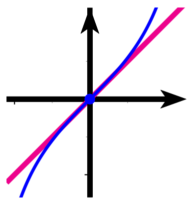
$$\begin{aligned}(\tan)'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}\\ &= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

a. Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

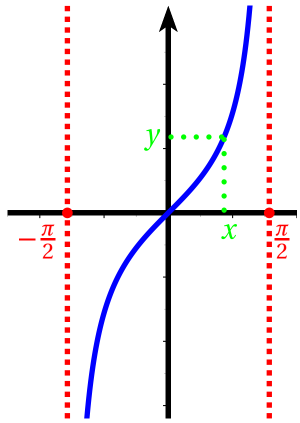
Remarque.
$(\tan)'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1 + 0^2 = 1$ est la pente de la courbe de la fonction tangente au point d'abscisse 0 :



Déf.7

Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = y$. On note alors

$$x = \arctan y.$$



Exemple 7

- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,
- $\arctan 0 = 0$,
- $\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

Exercices

Exercices 14 à 18

IV. Étude d'une fonction trigonométrique

Exemple 8

On pose $g(x) = \sin^2 x + \cos x = (\sin x)^2 + \cos x$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous allons successivement :

- **Étape 1.** Étudier la parité de g et sa périodicité. On pourra alors réduire l'intervalle d'étude.
- **Étape 2.** Calculer la dérivée et étudier les variations de g sur l'intervalle réduit.
- **Étape 3.** Construire la courbe représentative de g.

Étape 1.
La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire, donc pour tout réel x :

$$g(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) = (-\sin x)^2 + \cos x = (\sin x)^2 + \cos x = g(x).$$

La fonction g est donc paire.

Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques, donc pour tout réel x :

$$g(x+2\pi) = (\sin(x+2\pi))^2 + \cos(x+2\pi) = (\sin x)^2 + \cos x = g(x).$$

La fonction g est donc 2π-périodique.

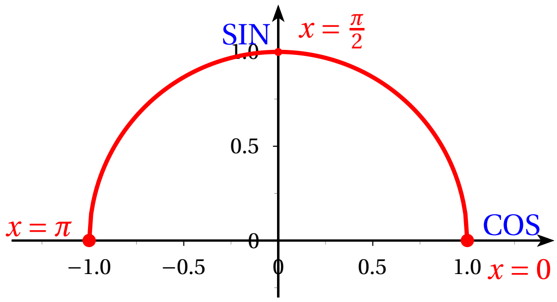
Comme g est 2π-périodique, on peut l'étudier sur $[-\pi;\pi]$ uniquement; et comme elle est paire, on peut même réduire l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$.

Étape 2.
D'après la formule $\left(u^2\right)' = 2 \times u' \times u$, pour tout $x \in [0;\pi]$:

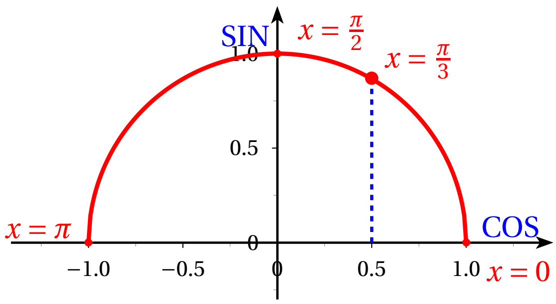
$$g'(x) = 2\sin'(x) \times \sin x + \cos'(x) = 2\cos x \sin x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1).$$

Pour étudier les variations, on résout les équations $\sin x = 0$ et $2\cos x - 1 = 0$ dans $[0;\pi]$:

$$\sin x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \pi$$



$$2\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$$



On peut donc construire le tableau de variations :

Exemple 8 – Suite

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$	0
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1

Pour obtenir le signe de $\sin x$ et de $2\cos x - 1$ sur chaque intervalle, on remplace par des valeurs de x. Par exemple, pour la ligne $2\cos x - 1$:

- $2\cos 0 - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \oplus$,
- $2\cos \pi - 1 = 2 \times (-1) - 1 = -3 \ominus$,

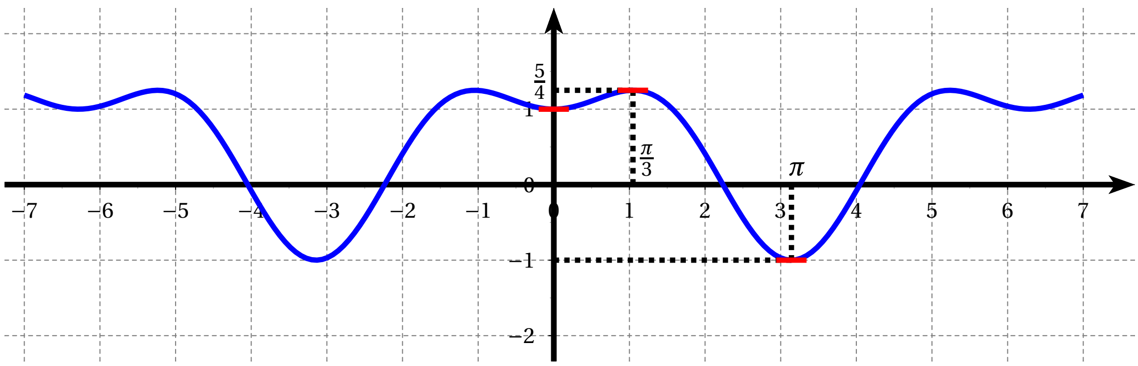
d'où les signes $\boxed{2\cos x - 1 \mid + \ \phi \ -}$.

De plus :

- $g(0) = (\sin 0)^2 + \cos 0 = 0^2 + 1 = 1$;
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$;
- $g(\pi) = (\sin \pi)^2 + \cos \pi = 0^2 + (-1) = -1$.

Remarque.
Comme la dérivée s'annule, on a des tangentes horizontales aux points de la courbe d'abscisses 0, $\frac{\pi}{3}$ et π (tracées en rouge sur la courbe à l'étape 3).

Étape 3.
On trace la courbe sur $[0;\pi]$ à partir du tableau de variations, puis on complète par parité et par périodicité.



Exercices

Exercice 19

V. Exercices

Exercice 1.
Calculer le cos et le sin de :

1. π, $\frac{\pi}{2}$, 0, -5π, $\frac{31\pi}{2}$.
2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$.
3. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$.
4. $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2023\pi}{4}$.

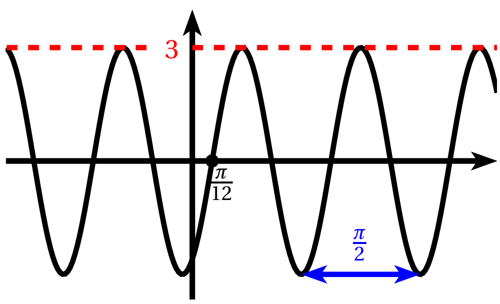
Exercice 2 (🏛).
Résoudre chaque (in)équation dans l'intervalle donné :

1. $\cos x = \frac{1}{2}$, dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. $2\sin x - 1 = 0$, dans $[0;\pi]$.
3. $2\sin x - 1 \geq 0$, dans $[0;\pi]$.
4. $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x = 0$, dans $[-\pi;\pi]$.
5. $2\sin x \cos x = -\sin x$, dans $[0;\pi]$.
6. $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0;2\pi]$.
7. $|\sin x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $[0;2\pi]$.
8. $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, dans $[0;\pi]$.
9. $2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$, dans $[0;2\pi]$.
10. $\sin x = 0$, dans $\mathbb{R}$.
11. $\cos x = 0$, dans $\mathbb{R}$.
12. $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (🏛).
Dans chaque question, tracer dans un même repère, sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$, les courbes dont on vous donne l'équation.

1. $y = \cos x$, $\quad y = 2\cos(x) + 1$.
2. $y = \sin x$, $\quad y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
3. $y = \sin x$, $\quad y = \sin(2x)$.

Exercice 4 (🏅).
On a tracé ci-dessous une courbe d'équation $y = A\sin(\omega t - \varphi)$, où A, ω et φ sont trois réels ($A > 0$, $\omega > 0$).



Déterminer les valeurs de A, ω et φ.

Exercice 5 (🏛).
Calculer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

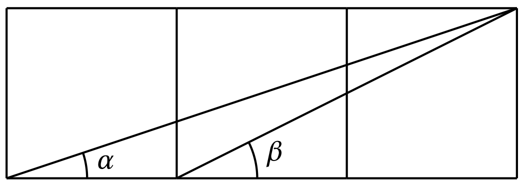
1. $f : x \longmapsto \sin(2x)$.
2. $g : x \longmapsto \sin(-3x + 4)$.
3. $h : x \longmapsto \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$.
4. $i : x \longmapsto \sin x \cos x$.

Exercice 6 (🏛).
Calculer $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, puis donner les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 7.

1. Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants :
   - $\cos x = \frac{3}{5}$,
   - $\sin x = \frac{2}{3}$.
2. Soit $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$. Calculer $\sin(2x)$

Exercice 8.
Trois carrés sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



1. Calculer $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$ et $\sin\beta$.
2. Prouver que $\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Donner un encadrement de $\alpha + \beta$.
4. En déduire $\alpha + \beta$.

Exercice 9 (🏛).

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis donner la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. En prenant $a = \frac{\pi}{12}$ dans la formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ d'une autre manière.
3. Dans les questions 1 et 2, on a trouvé deux résultats différents pour $\sin\frac{\pi}{12}$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 10.
En utilisant la transformation de Fresnel, donner l'allure de la courbe d'équation

$$y = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$$

sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Exercice 11 (🏛).
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\sqrt{6}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 0$.
2. $2\cos(2x) - 2\sin(2x) = 2\sqrt{2}$.

Exercice 12 (🏅).
En utilisant les formules de duplication, démontrer que pour tous réels p, q :

- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

Exercice 13 (🏛).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer la somme $\sin(5x) + \sin x$ en produit.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) + \sin x = 0$.

Exercice 14 (🏛).
Calculer la tan de π, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$.

Exercice 15 (🏛).
Déterminer :

- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
- $\arctan(-1)$

Exercice 16.
Construire le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et placer sur $\mathscr{C}$:

- $\arctan 2$
- $\arctan(-3)$

Exercice 17 (🏛).
Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan t}.$$

Exercice 18 (🏛).
Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\sin(2t) = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}, \quad \cos(2t) = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}.$$

Exercice 19 (🏛).
On définit une fonction f par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(2x) - 2\sin x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité et la périodicité de f. En déduire un intervalle d'étude réduit I.
2. Prouver que $f'(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$ pour tout $x \in I$.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse π.
5. Construire la courbe $\mathscr{C}$.