Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, $[\![i\,;j]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leqslant k \leqslant j$.

Partie A : étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

I. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

II. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n).$$

III. À l'aide de la relation précédente :

1. Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

2. Démontrer que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

IV. On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \qquad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.

V. **1.** Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leqslant H_n - \ln(n) - \gamma \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Écrire en langage Python une fonction prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie B : le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Le problème de Bâle consiste en la détermination de la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$. Ce problème a été résolu en 1741, par Léonhard Euler, qui a démontré que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

VI. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

VII. Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On explicitera le théorème de convergence utilisé.

VIII. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0\,;\pi]$,

$$\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = D_n(t).$$

2. En déduire que, si $t \in]0\,;\pi]$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.$$

3. Calculer la valeur de $D_n(0)$.

IX. On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0, \\ 1 \text{ si } t = 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Démontrer que f est dérivable en 0.

3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

X. **1.** Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\mathrm{d}t.$$

3. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \mathrm{d}t.$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XI. Déterminer une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

XII. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0.$$

XIII. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie C : les lois géométriques

XIV. Démontrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, la série de terme général x^k converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

XV. Justifier, pour tout $x \in]-1\,;1[$, les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On citera précisément les théorèmes utilisés.

XVI. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. Démontrer qu'on définit une loi de probabilité sur l'univers $\mathbb{N}^*$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$p_k = p(1-p)^{k-1}.$$

On rappelle qu'une variable aléatoire définie sur un univers Ω suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

XVII. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Démontrer que X admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, et une variance, notée $\mathbb{V}(X)$, vérifiant :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

XVIII. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i)$, où $p_i \in]0\,;1[$.

1. Donner l'espérance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ en fonction des p_i.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}.$$

Partie D : inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

XIX. Inégalité de Markov

Soit Y une variable aléatoire positive définie sur un univers Ω, possédant une espérance notée $\mathbb{E}(Y)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(Y \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

On pourra décomposer $Y(\Omega)$ sous la forme $Y(\Omega) = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 = \{y \in Y(\Omega),\ y \geqslant a\}, \qquad Y_2 = \{y \in Y(\Omega),\ y < a\}.$$

XX. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω possédant une espérance notée $\mathbb{E}(X)$ et une variance notée $\mathbb{V}(X)$.
Démontrer que, pour tout nombre réel a strictement positif,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Partie E : le problème du collectionneur

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un fabricant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.

Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.
Soit $k \in [\![1; n]\!]$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.
On note Z_k le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

XXI. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

XXII. Déterminer la loi de T_1.

XXIII. **1.** On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

2. En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

3. En déduire la loi de T_2.

4. On suppose que la collection contient 100 animaux. Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieure ou égale à 0,99.

5. Pour tout entier $k \in [\![1\,;n]\!]$, justifier que

$$Z_k = \begin{cases} T_1 \text{ si } k = 1, \\ T_k - T_{k-1} \text{ si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

6. En déduire, pour $k \geqslant 2$, une expression de T_k en fonction des Z_i.

7. Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k.

8. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n.$$

9. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

XXIV. On admet que les variables aléatoires Z_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

1. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

2. En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

XXV. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

XXVI. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01.$$