Récurrence et sommes : corrigé de l'ex 29

Soient a et b deux nombres complexes.

1. Pour prouver l'égalité $\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$, il suffit de développer et réduire le membre de droite. Les termes « centraux » s'annulent deux à deux (télescopage) :

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a\times a^2 + a\times ab + a\times b^2 - b\times a^2 - b\times ab - b\times b^2 = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

   On montre de même que

$$\boxed{a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right).}$$

2. On généralise les formules de la question 1.
   Soit donc n un entier supérieur ou égal à 2. On calcule :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} &= a\times\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} - b\times\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} && \text{(on distribue)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} a\times b^{k-1}a^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} b\times b^{k-1}a^{n-k} && \text{(par linéarité)}\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n+1-k}}_{S_1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b^{k}a^{n-k}}_{S_2} && \text{(calcul)}
\end{aligned}$$

   Les termes dans les deux sommes vont s'annuler deux à deux, mais cela n'a rien d'évident a priori. Pour le voir, il faut faire un changement d'indice dans la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-(k-1)} \underset{\boxed{j=k-1}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} b^{j}a^{n-j},$$

   si bien que

$$(a-b)\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} = \overbrace{\sum_{j=0}^{n-1} b^{j}a^{n-j}}^{S_1} - \overbrace{\sum_{k=1}^{n} b^{k}a^{n-k}}^{S_2}.$$

   On sépare les termes d'indice $j=0$ dans la première somme, et $k=n$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} &= \sum_{j=0}^{n-1} b^{j}a^{n-j} - \sum_{k=1}^{n} b^{k}a^{n-k}\\
&= \left(b^0a^{n-0} + \sum_{j=1}^{n-1} b^{j}a^{n-j}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} b^{k}a^{n-k} + b^na^{n-n}\right)\\
&= a^n + \sum_{j=1}^{n-1} b^{j}a^{n-j} - \sum_{k=1}^{n-1} b^{k}a^{n-k} - b^n.
\end{aligned}$$

   Les termes centraux s'annulent entre eux et il reste :

$$\boxed{(a-b)\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}a^{n-k} = a^n - b^n.}$$