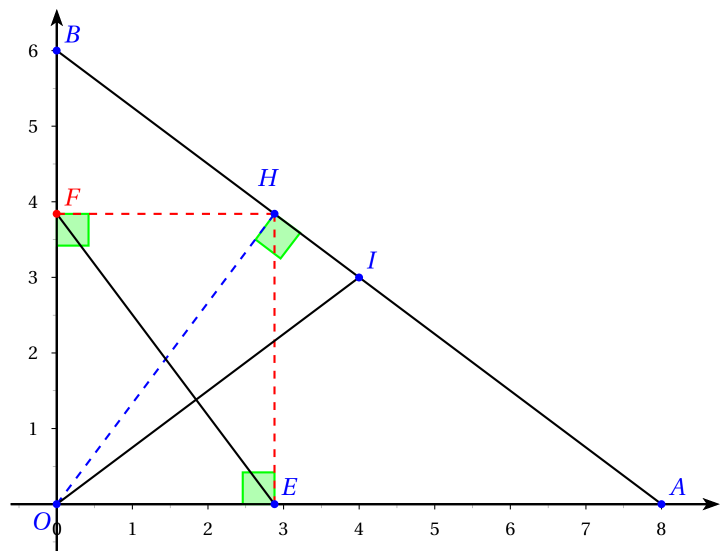
Géométrie du plan : corrigé de l'ex 24

On considère dans un repère de centre O les points $A(8;0)$ et $B(0;6)$, le milieu I de $[AB]$ et le projeté orthogonal H de O sur (AB).

1.



2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\begin{array}{l}-b\\a\end{array}$ est un vecteur directeur de (AB), donc (AB) a une équation de la forme

$$6x+8y+c=0.$$

$A(8;0)\in(AB)$, donc $6\times8+8\times0+c=0$, soit $48+c=0$ et finalement $c=-48$.
Conclusion : $(AB): 6x+8y-48=0$, ou en simplifiant par 2 :

$$\boxed{(AB): 3x+4y-24=0.}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}\begin{array}{l}a\\b\end{array}$ est un vecteur normal à (OH), donc (OH) a une équation de la forme

$$-8x+6y+c=0.$$

$O(0;0)\in(OH)$, donc $-8\times0+6\times0+c=0$, soit $0+c=0$ et ainsi $c=0$.
Conclusion : $(OH): -8x+6y=0$, ou en simplifiant par 2 :

$$\boxed{(OH): -4x+3y=0.}$$

(b) H est le point d'intersection de (AB) et (OH), donc pour avoir ses coordonnées on résout le système

$$\begin{cases} 3x+4y=24 & L_1\\ -4x+3y=0 & L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x+16y=96 & L_1\longleftarrow 4L_1\\ -12x+\ \ 9y=0 & L_2\longleftarrow 3L_2\end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x+16y=96 & L_1\longleftarrow L_1\\ \qquad\ \ 25y=96 & L_2\longleftarrow L_2+L_1\end{cases}$$

On a donc

$$y = \frac{96}{25} = 3,84,$$

et

$$x = \frac{96 - 16y}{12} = \frac{96 - 16 \times 3,84}{12} = 2,88.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } H\,(2,88;3,84)\,.}$$

3. Le point H se projette orthogonalement en E sur l'axe des abscisses et en F sur l'axe des ordonnées, donc $E(2,88;0)$ et $F(0;3,84)$. Par ailleurs I est le milieu de $[AB]$ donc

$$I\left(\frac{8+0}{2};\frac{0+6}{2}\right) \qquad I(4;3).$$

On a donc $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-2,88\\3,84\end{pmatrix}$. Il s'ensuit que

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{EF} = 4 \times (-2,88) + 3 \times 3,84 = 0$$

et donc

$$\boxed{(OI) \perp (EF).}$$