

Trigonométrie : corrigé des ex 12 et 21

Exercice 12

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = 1$ et que $e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} = e^{i\theta}$, donc

$$\begin{aligned} |1 - e^{i\theta}| &= \left| e^{-i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \\ &= \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \right| \\ &= \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \times \left| e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Or $|2i| = 2$, donc d'après la 2^e formule d'Euler :

$$\left| e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 2 \frac{\left| e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right|}{|2i|} = 2 \left| \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right| = 2 \left| \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|.$$

Enfin $\left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 1$, donc

$$\boxed{|1 - e^{i\theta}| = \left| e^{i\frac{\theta}{2}} \right| \times \left| e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right| = 1 \times 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|.$$

Exercice 21

On considère l'équation

$$(E) \quad z^3 = -1.$$

1. **Analyse.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z est une solution de (E) et on pose $Z = z \times e^{i\frac{\pi}{3}}$. On a alors :

$$Z^3 = \left(z \times e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^3 = z^3 \times \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^3 = z^3 \times e^{i\pi} = z^3 \times e^{i\pi}.$$

Or $z^3 = -1$, puisque par hypothèse z est solution de (E) ; et on sait aussi que $e^{i\pi} = -1$. On en déduit :

$$Z^3 = z^3 \times e^{i\pi} = (-1) \times (-1) = 1,$$

c'est-à-dire que Z est une racine cubique de l'unité. Il s'ensuit que :

$$Z = 1 \quad \text{ou} \quad Z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad Z = e^{i\frac{4\pi}{3}}.$$

Or $Z = z \times e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $z = \frac{Z}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = Z \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Finalement

$$z = 1 \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1.$$

Conclusion : les solutions possibles sont

$$\boxed{z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_3 = -1.}$$

2. **Synthèse.** On vérifie que z_1, z_2, z_3 sont bien solutions de (E) :

$$z_1^3 = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{-i\frac{3\pi}{3}} = e^{-i\pi} = -1 \quad \text{donc } z_1 \text{ est bien solution.}$$

$$z_2^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1 \quad \text{donc } z_2 \text{ est bien solution.}$$

$$z_3^3 = (-1)^3 = -1 \quad \text{donc } z_3 \text{ est bien solution.}$$

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \left\{ e^{-i\frac{\pi}{3}} ; e^{i\frac{\pi}{3}} ; -1 \right\}.$$