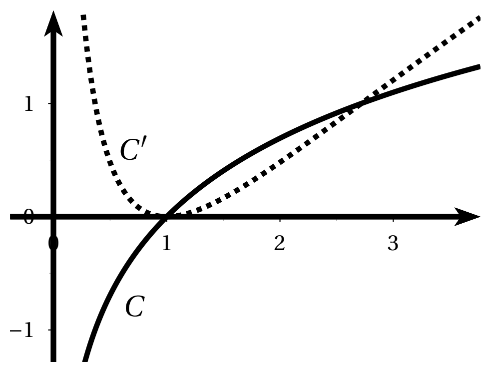
Généralités sur les fonctions : corrigé de l'ex 26

Les fonctions f et g sont définies sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x \qquad\qquad g(x) = (\ln x)^2.$$

On note C et C' leurs courbes représentatives respectives, tracées ci-dessous.



1. On utilise la formule $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$, avec

$$u(x) = \ln x, \qquad u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad n = 2.$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x.$$

On a donc le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$2 \times \frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$g(1) = (\ln 1)^2 = 0^2 = 0.$$

On calcule les limites en $+\infty$ et à droite en 0 :

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x & = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^2 & = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to0,\ x>0} \ln x & = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 & = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to0,\ x>0} (\ln x)^2 = +\infty.$$

2. Étudier les positions relatives de C et C' revient à étudier le signe de leur différence. Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\ln x - (\ln x)^2 = 1 \times \ln x - \ln x \times \ln x = \ln x(1 - \ln x).$$

On résout les équations dans $]0;+\infty[$:

$$\ln x = 0 \iff \mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0 \iff x = 1,$$
$$1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{\ln x} \iff \mathrm{e}^1 = x.$$

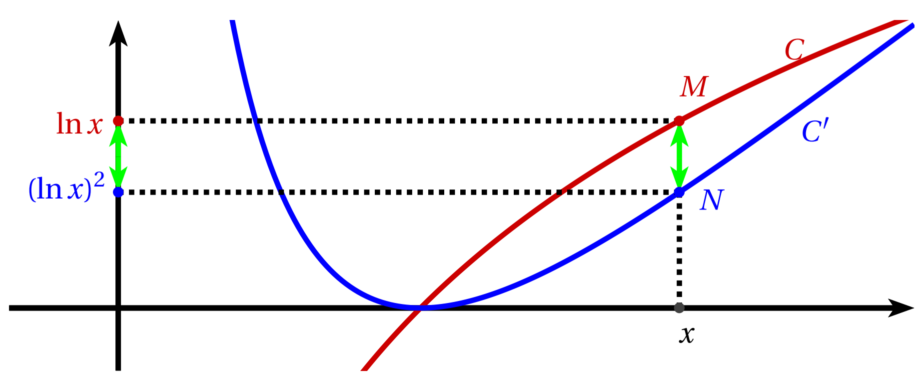
On a donc le tableau :

x	0		1		e^1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(1 - \ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- les courbes C et C' se coupent aux points d'abscisses 1 et e^1 ;
- la courbe C est au dessus de C' sur l'intervalle $]1;\mathrm{e}^1[$;
- la courbe C est en dessous de C' sur les intervalles $]0;1[$ et $]\mathrm{e}^1;+\infty[$.

3. Pour tout réel $x \in [1;\mathrm{e}]$, on note M (respectivement N) le point de C (resp. C') d'abscisse x.



La longueur MN est la longueur verte. Comme $y_M = f(x) = \ln x$ et $y_N = g(x) = (\ln x)^2$:

$$MN = y_M - y_N = \ln x - (\ln x)^2.$$

Étudier la valeur de x pour laquelle la longueur MN est maximale revient donc à déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction h, définie sur $\left[1;\mathrm{e}^1\right]$ par $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$, atteint son maximum. Pour résoudre le problème, on utilise la dérivation : pour tout $x \in \left[1;\mathrm{e}^1\right]$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \\ &= \frac{1-2\ln x}{x}. \end{aligned}$$

Or

$$1-2\ln x = 0 \iff 1 = 2\ln x \iff \frac{1}{2} = \ln x \iff \mathrm{e}^{1/2} = \mathrm{e}^{\ln x} \iff \mathrm{e}^{1/2} = x.$$

On a donc le tableau (il est inutile ici de compléter l'extrémité des flèches) :

x	1		$\mathrm{e}^{1/2}$		e^1
$1-2\ln x$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Conclusion : h atteint son maximum pour $x = \mathrm{e}^{1/2}$, donc la longueur MN est maximale lorsque $x = \mathrm{e}^{1/2}$.