Trigonométrie : corrigé de l'ex 12

Pour tous réels p, q :

$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) = \sin\left(\frac{p}{2}+\frac{q}{2}\right) = \sin\frac{p}{2}\cos\frac{q}{2}+\sin\frac{q}{2}\cos\frac{p}{2},$$
$$\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p}{2}-\frac{q}{2}\right) = \cos\frac{p}{2}\cos\frac{q}{2}+\sin\frac{p}{2}\sin\frac{q}{2}.$$

On en déduit, en distribuant :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= \left[\sin\frac{p}{2}\cos\frac{q}{2}+\sin\frac{q}{2}\cos\frac{p}{2}\right]\times\left[\cos\frac{p}{2}\cos\frac{q}{2}+\sin\frac{p}{2}\sin\frac{q}{2}\right]\\ &= \sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\cos^2\frac{q}{2}+\cos\frac{q}{2}\sin\frac{q}{2}\sin^2\frac{p}{2}+\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}\cos^2\frac{p}{2}+\cos\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\sin^2\frac{q}{2}\end{aligned}$$

On regroupe les termes d'une même couleur et on utilise l'identité $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ &= {\color{blue}\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\cos^2\frac{q}{2}}+{\color{red}\cos\frac{q}{2}\sin\frac{q}{2}\sin^2\frac{p}{2}}+{\color{red}\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}\cos^2\frac{p}{2}}+{\color{blue}\cos\frac{p}{2}\sin\frac{p}{2}\sin^2\frac{q}{2}}\\ &= {\color{blue}\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}\left(\cos^2\frac{q}{2}+\sin^2\frac{q}{2}\right)}+{\color{red}\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}\left(\cos^2\frac{p}{2}+\sin^2\frac{p}{2}\right)}\\ &= {\color{blue}\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}}+{\color{red}\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}}\end{aligned}$$

On en déduit finalement

$$2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = 2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p}{2}+2\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}.$$

On peut conclure : l'identité $\sin(2a) = 2\sin a\cos a$ se réécrit $\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$, si bien que la dernière égalité ci-dessus donne

$$\boxed{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin p+\sin q.}$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer la deuxième formule (la méthode est la même et c'est un bon entraînement au calcul).