Pratique calculatoire : corrigé de l'ex 21

Soient x, y deux réels.

1. Pour prouver que $|x+y| \leq |x|+|y|$, on va comparer les carrés de chacun des deux membres. D'après la proposition 2 du cours :
   - d'une part,
   $$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \ ;$$
   - d'autre part,
   $$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + 2 \times |x| \times |y| + |y|^2 = x^2 + 2|xy| + y^2.$$

   Or $xy \leq |xy|$, donc $2xy \leq 2|xy|$; et finalement, en ajoutant x^2 et y^2 dans chaque membre :
   $$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2.$$
   Autrement dit :
   $$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2.$$
   Conclusion : les nombres $|x+y|$ et $|x|+|y|$ sont positifs et $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$. Or deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés, donc
   $$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

2. L'astuce consiste à écrire $x = (x-y)+y$ et à utiliser la question 1, en faisant jouer le rôle de x à $x-y$ (tandis que le rôle de y est joué par y lui-même) :
   $$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \qquad \text{d'après l'inégalité triangulaire (qu°1),}$$
   donc
   $$|x| - |y| \leq |x-y|.$$